Equations Différentielles Ordinaires
Partie 1 : Introduction et Exemples

MACS 1

January 10, 2017

Programme

- Introduction et exemples
- Equations linéaires d'ordre 1 et 2
- Théorème de Cauchy-Lipschitz
- Quelques ´quations qu'on sait résoudre à la main
- Systèmes linéaires
- Stabilités des points stationnaires
- Calcul de solutions approchées

Equations Différentielles Ordinaires

- Equations algébriques

$$f(x) = 0$$

- Systèmes linéaires

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Equations Différentielles Ordinaires (EDO)

$$F(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0$$

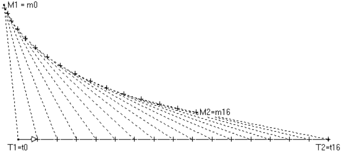
- Systèmes linéaires d'EDO

$$\mathbf{f}'(t) = A(t)\mathbf{f}(t) + \mathbf{b}(t)$$

- Equations aux Dérivées Partielles (EDP)

$$\Delta f(\mathbf{x}) := \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}_j^2} = g(\mathbf{x})$$

La première équation différentielle ?



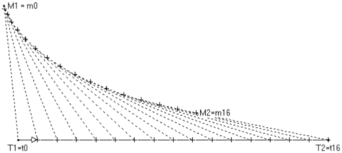
- Problème de la tractrice (1670)

$$x'(t) = a\frac{1 - \cos^2(t)}{\cos(t)}, \quad y(t) = a\cos(t)$$

où

- $(x(t), y(t))$ la position de l'objet
- a la longueur de la chaine

La première équation différentielle ?



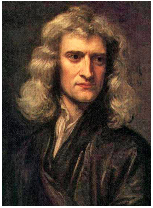
- Problème de la tractrice (1670)

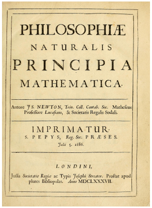
$$y'(x) = \pm \frac{y(x)}{\sqrt{a^2 - y(x)^2}}$$

où

- $(x(t), y(t))$ la position de l'objet
- a la longueur de la chaine

Mécanique





PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *JS. NEWTON*, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheseos Professore *Lucasiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Jussu *Societatis Regiæ* ac Typis *Josephi Streater*. Prostat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

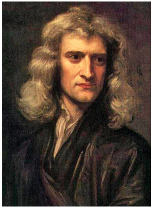
- Seconde loi de Newton (1687)

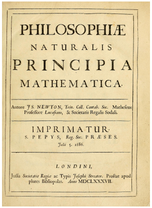
$$m\,\mathbf{x}''(t) = F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}'(t))$$

où

  - $\mathbf{x}$ la position (du centre de gravité) de l'objet
  - m la masse de l'objet
  - F les forces extérieures

Mécanique



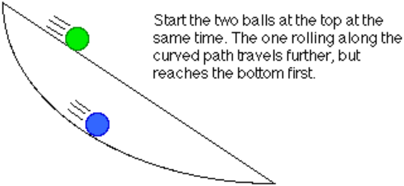

PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.
Autore J S. NEWTON, Trin. Coll. Cantab. Soc. Matheseos Professore Lucasiano, & Societatis Regalis Sodali.
IMPRIMATUR.
S. PEPYS, Reg. Soc. PRÆSES.
Julii 5. 1686.
LONDINI,
Jussu Societatis Regiæ ac Typis Josephi Streater. Prostat apud plures Bibliopolas. Anno MDCLXXXVII.

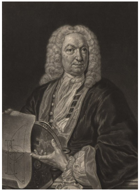
- Seconde loi de Newton (1687)

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \mathbf{v}(t) \\ m\,\mathbf{v}'(t) &= F(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t)) \end{aligned}$$

où

  - $\mathbf{x}$ la position (du centre de gravité) de l'objet
  - $\mathbf{v}$ la vitesse (du centre de gravité) de l'objet
  - m la masse de l'objet
  - F les forces extérieures





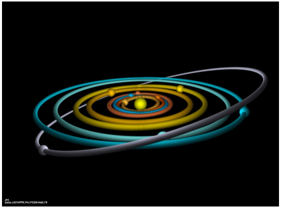
- Courbe brachistochrone (1696)

$$(1 + y'(x)^2)y(x) = y(0)$$

où

- $y(x)$ graphe du "toboggan"

Mécanique Céleste



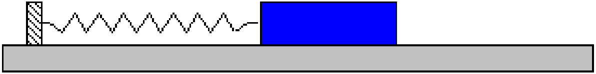
- Problèmes à N corps (1687, 1888, 1909)

$$m_j\,\mathbf{x}_j''(t) = -G \sum_{k \neq j} \frac{m_j m_k(\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_k(t))}{\|\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_k(t)\|^3}$$

où

- $\mathbf{x}_j$ la position (du centre de gravité) des N corps
- m_j la masse des N corps
- G la constante de gravitation universelle

Système Masse-Ressort



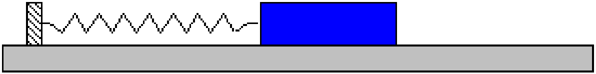
- Cas simple

$$mx''(t) + k(x(t) - x_0) = 0$$

où

  - x la position (du centre de gravité) de l'objet
  - m la masse de l'objet
  - k la raideur du ressort

Système Masse-Ressort



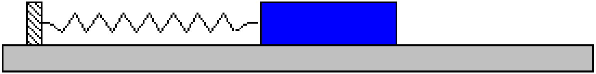
- Avec frottement "fluide"

$$mx''(t) + \alpha x'(t) + k(x(t) - x_0) = 0$$

où

  - x la position (du centre de gravité) de l'objet
  - m la masse de l'objet
  - k la raideur du ressort
  - α coefficient de friction

Système Masse-Ressort



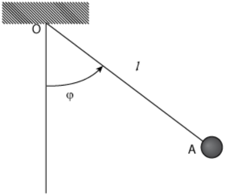
- Oscillations entretenues

$$mx''(t) + \alpha x'(t) + k(x(t) - x_0) = f(t)$$

où

- x la position (du centre de gravité) de l'objet
- m la masse de l'objet
- k la raideur du ressort
- α coefficient de friction
- f force extérieure

Oscillations d'un pendule



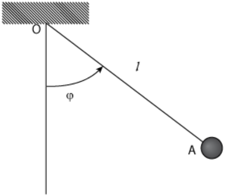
- Oscillations d'un pendule simple

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\sin\left(\theta(t)\right) = 0$$

où

  - θ l'angle du pendule avec la verticale
  - l la longueur du fil
  - g la constante de pesanteur

Oscillations d'un pendule



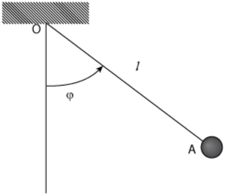
- Petites oscillations (cas linéaire)

$$\theta''(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0$$

où

- θ l'angle du pendule avec la verticale
- l la longueur du fil
- g la constante de pesanteur

Oscillations d'un pendule



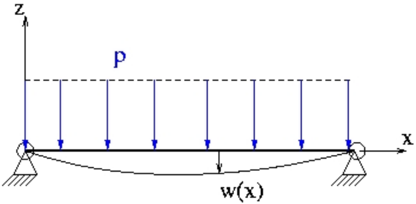
- Pendules couplés (cas linéaire)

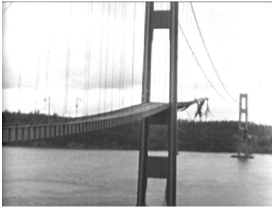
$$\theta_j''(t) + \frac{g}{l}\theta_j(t) + \frac{kd^2}{ml^2}(\theta_j(t) - \theta_k(t)) = 0, \quad j = \{1, 2\}, \quad k \neq j$$

où

  - θ l'angle du pendule avec la verticale
  - l la longueur du fil
  - g la constante de pesanteur

Théorie des poutres





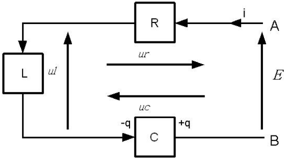
- Vibrations propres (petites déformations)

$$EI\, z^{(4)}(x) - \rho S \omega^2 z(x) = 0, \quad z(t,x) = Z(x) e^{i\omega t}$$

où

- z le déplacement de la poutre
- E le module d'Young de la poutre, ρ sa masse volumique
- I le moment quadratique de la poutre de section S
- ω la fréquence de vibration

Circuit RLC



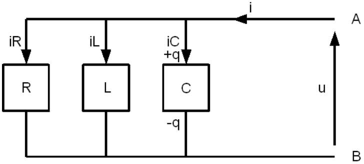
- En série

$$LC\, u_c''(t) + RC\, u_c'(t) + u_c(t) = E(t)$$

où

- u_c la tension aux bornes du condensateur
- E la tension aux bornes du générateur
- R la résistance du circuit
- L l'inductance de la bobine
- C la capacité du condensateur

Circuit RLC



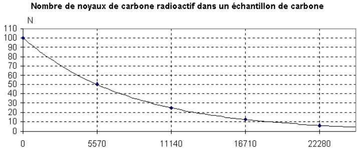
- En parallèle

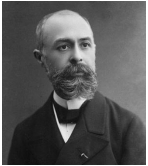
$$LRC\,u''(t) + L\,u'(t) + R\,u(t) = LRi'(t)$$

où

- u la tension aux bornes du circuit
- i intensité du courant dans le circuit
- R la résistance du circuit
- L l'inductance de la bobine
- C la capacité du condensateur

Radioactivité





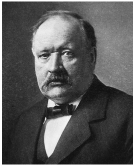
- Datation au Carbone 14

$$c'(t) = -\frac{\ln(2)}{\tau} c(t)$$

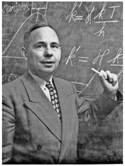
où

- c la concentration en carbone 14
- τ la demi-vie du carbone 14

Cinétique Chimie



$$A \xrightarrow[k_1]{} B \xrightarrow[k_2]{} C$$



- Réactions mono-moléculaires successives

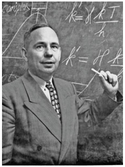
$$\begin{aligned} A'(t) &= -k_1 A(t) \\ B'(t) &= k_1 A(t) - k_2 B(t) \\ C'(t) &= k_2 B(t) \end{aligned}$$

où

- A, B et C concentration des espèces
- k_j vitesse de réaction

Cinétique Chimie

$$
\begin{array}{ccc}
A_1 + A_2 & \xrightarrow[k_1]{} & P_1 \\
A_1 + A_3 & \xrightarrow[k_2]{} & P_2
\end{array}
$$



- Réactions bi-moléculaires simultanées

$$
\begin{aligned}
A_1'(t) &= -k_1 A_1(t) A_2(t) - k_2 A_1(t) A_3(t) \\
A_2'(t) &= -k_1 A_1(t) A_2(t) \\
A_3'(t) &= -k_2 A_1(t) A_3(t)
\end{aligned}
$$

où

  - A_j concentration des espèces réactantes
  - P_j concentration des espèces produits
  - k_j vitesse de réaction

Dynamique des Populations

- Modèle de Malthus (1798)

$$N'(t) = (b(t) - d(t))N(t)$$

où

- N population de l'espèce
- b taux de naissance
- b taux de mort

Dynamique des Populations

- Modèle de Verhulst (1836)

$$N'(t) = r(t)N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K(t)}\right)$$

où

- N population de l'espèce
- r taux de naissance
- K capacité maximale du milieu

Dynamique des Populations

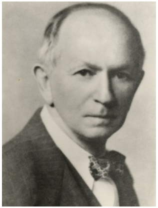
- Modèle de Ludwig-Jones et Holling (1978)

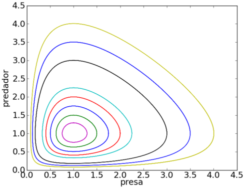
$$N'(t) = r(t)N(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K(t)}\right) - p(N(t))$$

où

- N population de l'espèce
- r taux de naissance
- K capacité maximale du milieu
- p prédation par un acteur externe

Dynamique des Populations





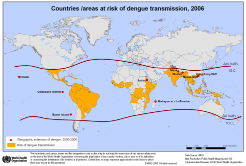
- Modèle de Lotka-Volterra (1925-1926)

$$
\begin{aligned}
N_1'(t) &= N_1(t)\,(\alpha_1 - \beta_1 N_2(t)) \\
N_2'(t) &= N_2(t)\,(\alpha_2 N_1(t) - \beta_2)
\end{aligned}
$$

où

- N_1 population des proies
- N_1 population des prédateurs
- α_j taux de croissance
- β_j taux de perte

Epidémiologie



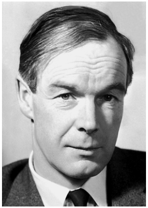
- Modèle de Ross pour la malaria (1902)

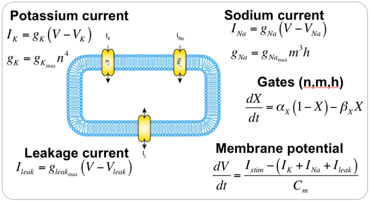
$$
\begin{aligned}
N_h'(t) &= m\alpha\beta_h N_m(1-N_h) - \gamma_h N_h \\
N_m'(t) &= \alpha\beta_m N_h(1-N_m) - \gamma_m N_m
\end{aligned}
$$

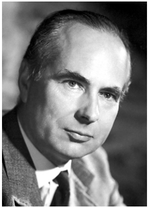
où

- N_h proportion d'humains infectés
- N_m proportion de moustiques infectés
- α probabilité de rencontre
- β_j taux d'infection
- γ_j taux de guérison et/ou de mort

Biologie



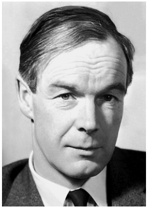


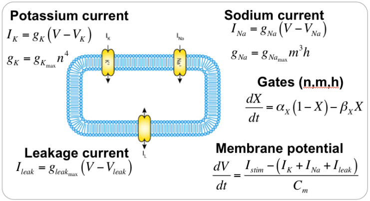


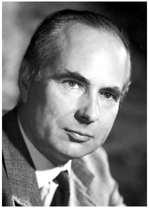
- Modèle de Hodgkin-Huxley (1952 – 1963)

$$
\begin{aligned}
C_m V'(t) &= I - (I_K + I_{Na} + I_l) \\
I_K &= g_K n(t)^4 (V(t) - V_K) \\
I_{Na} &= g_{Na} m(t)^3 h(t)(V(t) - V_{Na}) \\
I_l &= g_l (V(t) - V_l) \\
X'(t) &= \alpha_X(V(t))(1 - X(t)) - \beta_X(V(t))X(t), \quad X = n, m, h
\end{aligned}
$$

Biologie



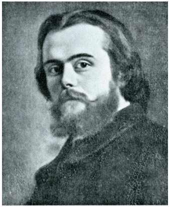


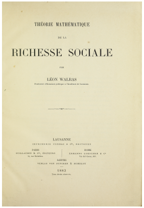


- Modèle de Hodgkin-Huxley (1952 – 1963)

$$
\begin{aligned}
C_m V'(t) &= I - (I_K + I_{Na} + I_l) \\
I_K &= g_K n(t)^4 (V(t) - V_K) \\
I_{Na} &= g_{Na} m(t)^3 h(t)(V(t) - V_{Na}) \\
I_l &= g_l (V(t) - V_l) \\
X'(t) &= \alpha_X(V(t))(1 - X(t)) - \beta_X(V(t))X(t), \quad X = n, m, h
\end{aligned}
$$

Economie




THÉORIE MATHÉMATIQUE

DE LA

RICHESSE SOCIALE

LÉON WALRAS

LAUSANNE

PARIS

ROME

LEIPZIG

1883

- Modèle de Walras (1874)

$$
\begin{aligned}
P'(t) &= k(D(P(t)) - O(P(t))) \\
D(P) &= \alpha - \beta P \\
O(P) &= \gamma + \delta P
\end{aligned}
$$

où

- P prix d'une marchandise
- D demande
- O offre

Economie

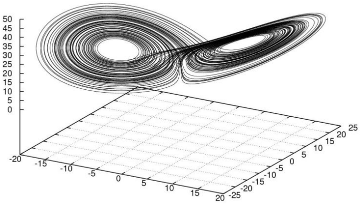

- Modèle de Keynes (1936)

$$\begin{aligned} R'(t) &= k(C(t) + I(t) + G - R(t)) \\ C(t) &= \alpha R(t) - R'(t) \\ I(t) &= \beta C'(t) \end{aligned}$$

où

- R est le revenu disponible
- C consommation
- I investissement
- G dépenses gouvernementales

Météorologie



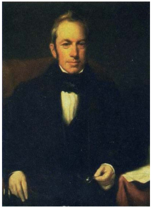
- Modèle de Lorenz (1963)

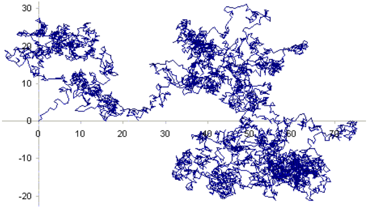
$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \sigma(y(t) - x(t)) \\
y'(t) &= \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\
z'(t) &= x(t)y(t) - \beta z(t)
\end{aligned}
$$

où

- $x(t)$ intensité du mouvement de convection
- $y(t)$ différence de température entre courants de sens contraire
- $z(t)$ profil vertical de température

Equations Différentielles Stochastiques (Mvt Brownien)





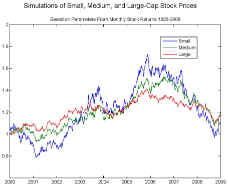
- Equation de Langevin (1908)

$$m\, dv(t) \quad = \quad -k\, v(t)dt + \sigma(v(t))dW(t)$$

où

- $v(t)$ vitesse de la particule
- m masse de la particule
- k coefficient de friction
- W processus de Wiener
- σ amplitude des variations

Equations Différentielles Stochastiques (Finances)



- Equation de Black Scholes (1973)

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

où

- $S(t)$ prix de l'actif sous-jacent
- μ taux d'intérêt sans risque
- W processus de Wiener
- σ volatilité de l'actif

Equations Différentielles au LAGA

- Biologie :
  The Evans function for the nerve influx,
  O. Lafitte, SMAI, 2008.
- Dynamique des Populations :
  Reduction to a single closed equation for 2 by 2 reaction-diffusion systems of Lotka-Volterra type,
  M. Strugarek & N. Vauchelet, submitted, 2016.
- Cinétique Chimie :
  Modélisation et simulation d'un procédé industriel d'extraction liquide-liquide
  P. Omnes
- EDS & Finance :
  A. Kebaier, M. Ben Alaya