Optimisation différentiable
Existence et caractérisation du minimum
Cas avec et sans contraintes

Centrale Casablanca

November 18, 2020

Un premier résultat

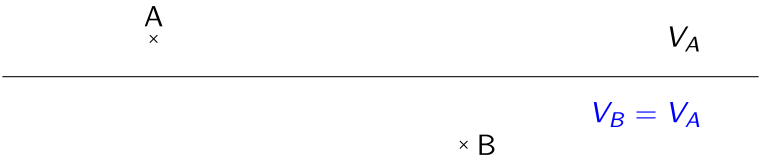
- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.

Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

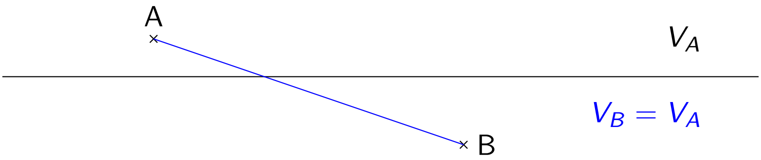
  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.



Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

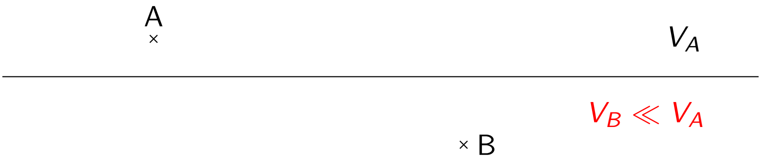
  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.



Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

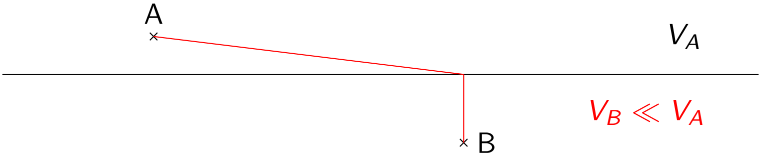
  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.



Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

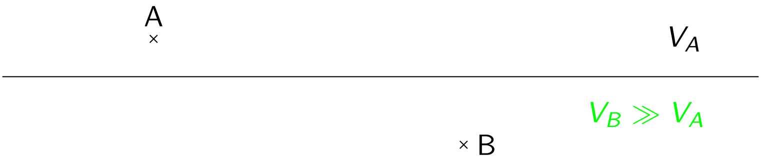
  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.



Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

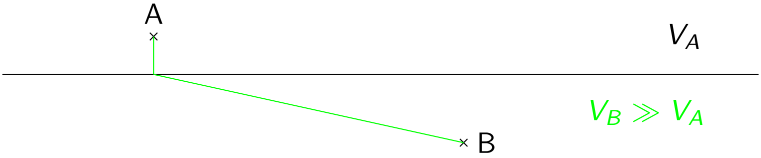
  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.



Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

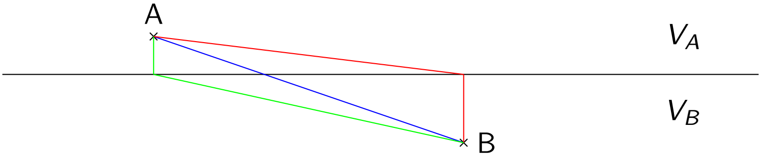
  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.



Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.

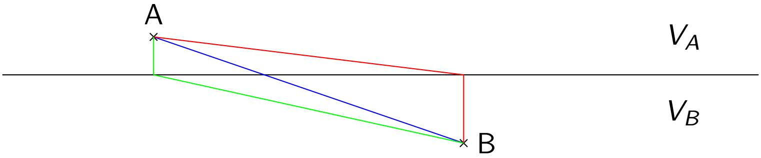


$\rightsquigarrow$ Quelle est la dimension du problème ?
(combien y a-t-il d'inconnues ?)

Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.



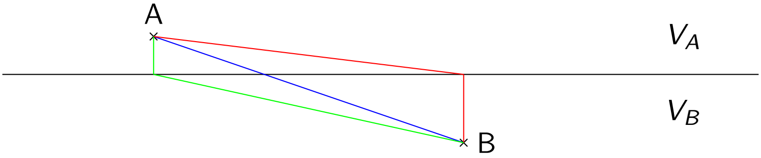
⇝ Quelle est la dimension du problème ?

A : 1 B : 2 C : 3 D : Plus

Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.

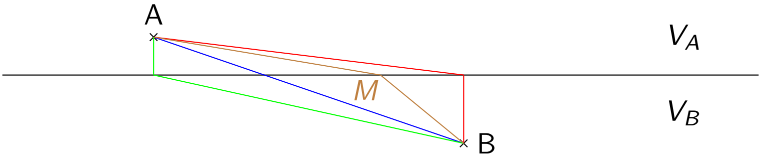


⇝ Quelle est la fonction à minimiser ?

Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.



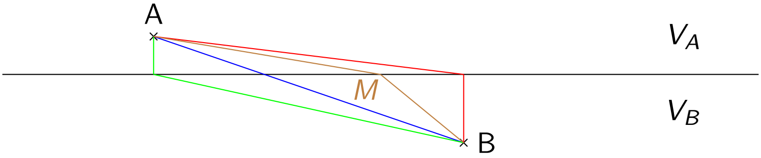
⇝ Quelle est la fonction à minimiser ?

$$T(x) = \frac{||\overrightarrow{AM}||}{V_A} + \frac{||\overrightarrow{MB}||}{V_B}, \quad M : (x, 0)$$

Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.

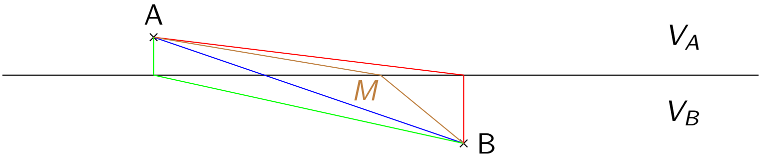


$\rightsquigarrow$ Comment caractérise-t-on un minimum ?

Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.

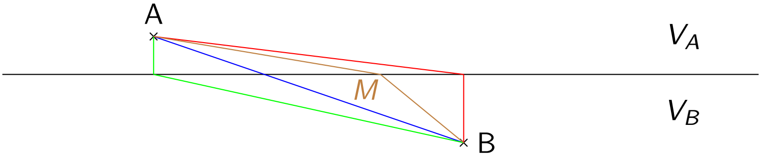


⇝ Comment caractérise-t-on un minimum ?

$$T'(x^*) = 0, \quad T''(x^*) \geq 0$$

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A *dans le domaine qui contient le point* A *et à la vitesse* V_B *dans le domaine qui contient le point* B.

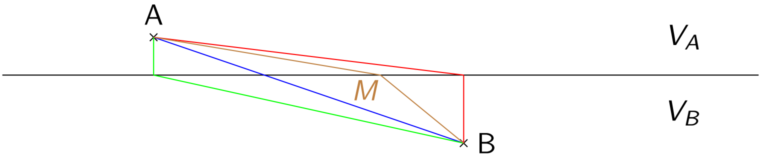


$\rightsquigarrow$ Calcul de la solution

Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.



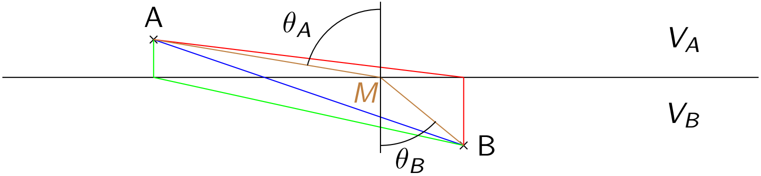
⇝ Calcul de la solution

$$\frac{1}{V_A}\frac{x - x_A}{||\overrightarrow{AM}||} + \frac{1}{V_B}\frac{x - x_B}{||\overrightarrow{MB}||} = 0$$

Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.



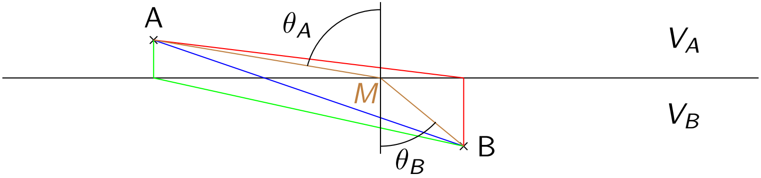
⇝ Calcul de la solution : Loi de Snell-Descartes

$$\frac{\sin\theta_A}{v_A} = \frac{\sin\theta_B}{v_B}$$

Un premier résultat

- Question : Déterminer le trajet le plus court (en temps !) entre le point A et le point B ?

  L'interface entre les deux milieux est plane et horizontale, on se déplace à la vitesse V_A dans le domaine qui contient le point A et à la vitesse V_B dans le domaine qui contient le point B.



$\rightsquigarrow$ Calcul de la solution : Loi de Snell-Descartes

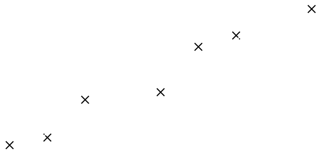
On vérifie qu'il s'agit bien d'un minimum.

Ici, on trouve $T''(x) > 0$ pour tout x.

Un résultat de base en analyse de données

- Question : Déterminer la droite de régression linéaire d'un nuage de N points de coordonnées (x_i, y_i).

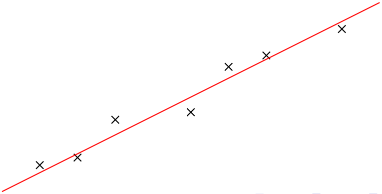
  On cherche ici à déterminer la droite qui décrit le mieux le nuage de points, dans un sens à préciser. Il s'agit de minimiser une certaine distance entre la droite et les points du nuage



Un résultat de base en analyse de données

- Question : Déterminer la droite de régression linéaire d'un nuage de N points de coordonnées (x_i, y_i).

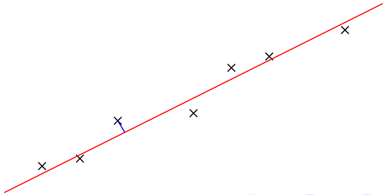
  On cherche ici à déterminer la droite qui décrit le mieux le nuage de points, dans un sens à préciser. Il s'agit de minimiser une certaine distance entre la droite et les points du nuage



Un résultat de base en analyse de données

- Question : Déterminer la droite de régression linéaire d'un nuage de N points de coordonnées (x_i, y_i).
  On cherche ici à déterminer la droite qui décrit le mieux le nuage de points, dans un sens à préciser. Il s'agit de minimiser une certaine distance entre la droite et les points du nuage

$\leadsto$ Minimiser la somme des distances entre les points et la droite.



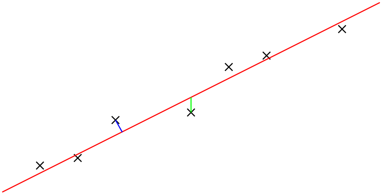
Un résultat de base en analyse de données

- Question : Déterminer la droite de régression linéaire d'un nuage de N points de coordonnées (x_i, y_i).

  On cherche ici à déterminer la droite qui décrit le mieux le nuage de points, dans un sens à préciser. Il s'agit de minimiser une certaine distance entre la droite et les points du nuage

$\rightsquigarrow$ Minimiser la somme des distances entre les points et la droite.

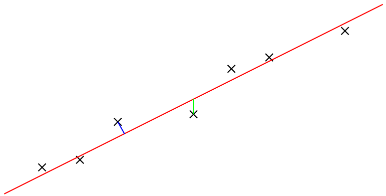
$\rightsquigarrow$ Minimiser la somme des *distances verticales* entre points et droite.



Un résultat de base en analyse de données

- Question : Déterminer la droite de régression linéaire d'un nuage de N points de coordonnées (x_i, y_i).
  On cherche ici à déterminer la droite qui décrit le mieux le nuage de points, dans un sens à préciser. Il s'agit de minimiser une certaine distance entre la droite et les points du nuage

$\rightsquigarrow$ Quelle est la dimension du problème ?



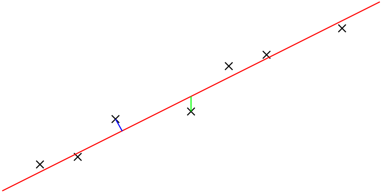
Un résultat de base en analyse de données

- Question : Déterminer la droite de régression linéaire d'un nuage de N points de coordonnées (x_i, y_i).
  On cherche ici à déterminer la droite qui décrit le mieux le nuage de points, dans un sens à préciser. Il s'agit de minimiser une certaine distance entre la droite et les points du nuage

$\rightsquigarrow$ Quelle est la dimension du problème ?

A : 1 B : 2

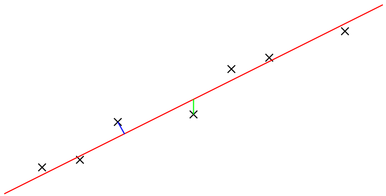
C : N D : Autre



Un résultat de base en analyse de données

- Question : Déterminer la droite de régression linéaire d'un nuage de N points de coordonnées (x_i, y_i).
  On cherche ici à déterminer la droite qui décrit le mieux le nuage de points, dans un sens à préciser. Il s'agit de minimiser une certaine distance entre la droite et les points du nuage

$\rightsquigarrow$ Quelle est la fonction à minimiser ?



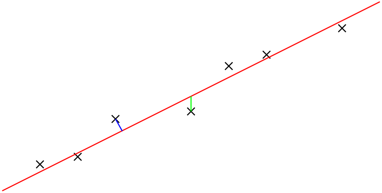
Un résultat de base en analyse de données

- Question : Déterminer la droite de régression linéaire d'un nuage de N points de coordonnées (x_i, y_i).
  On cherche ici à déterminer la droite qui décrit le mieux le nuage de points, dans un sens à préciser. Il s'agit de minimiser une certaine distance entre la droite et les points du nuage

⇝ Quelle est la fonction à minimiser ?

Somme des *distances verticales* au carré

$J(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$

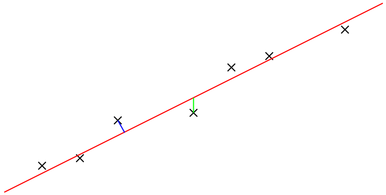


Un résultat de base en analyse de données

- Question : Déterminer la droite de régression linéaire d'un nuage de N points de coordonnées (x_i, y_i).

  On cherche ici à déterminer la droite qui décrit le mieux le nuage de points, dans un sens à préciser. Il s'agit de minimiser une certaine distance entre la droite et les points du nuage

$\rightsquigarrow$ Comment caractérise-t-on un minimum ?



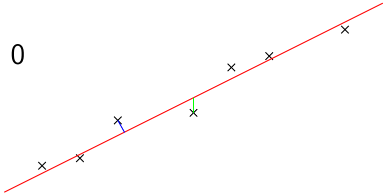
Un résultat de base en analyse de données

- Question : Déterminer la droite de régression linéaire d'un nuage de N points de coordonnées (x_i, y_i).
  On cherche ici à déterminer la droite qui décrit le mieux le nuage de points, dans un sens à préciser. Il s'agit de minimiser une certaine distance entre la droite et les points du nuage

$\rightsquigarrow$ Comment caractérise-t-on un minimum ?

$$\partial_a J(a^*, b^*) = 0, \quad \partial_b J(a^*, b^*),$$

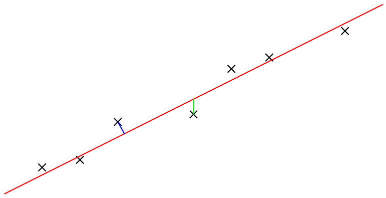
$$H_J(a,b) = \begin{pmatrix} \partial_{aa} J & \partial_{ab} J \\ \partial_{ba} J & \partial_{bb} J \end{pmatrix} \geq 0$$



- Question : Déterminer la droite de régression linéaire d'un nuage de N points de coordonnées (x_i, y_i).

  On cherche ici à déterminer la droite qui décrit le mieux le nuage de points, dans un sens à préciser. Il s'agit de minimiser une certaine distance entre la droite et les points du nuage

$\rightsquigarrow$ Calcul de la solution



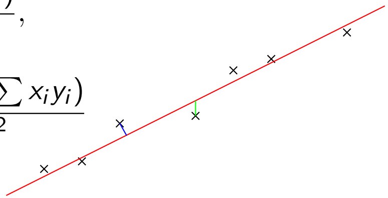
Un résultat de base en analyse de données

- Question : Déterminer la droite de régression linéaire d'un nuage de N points de coordonnées (x_i, y_i).
  On cherche ici à déterminer la droite qui décrit le mieux le nuage de points, dans un sens à préciser. Il s'agit de minimiser une certaine distance entre la droite et les points du nuage

⇝ Calcul de la solution

$$a = \frac{N\left(\sum x_i y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{N\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2},$$

$$b = \frac{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{N\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}$$



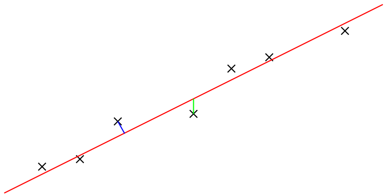
Un résultat de base en analyse de données

- Question : Déterminer la droite de régression linéaire d'un nuage de N points de coordonnées (x_i, y_i).
  On cherche ici à déterminer la droite qui décrit le mieux le nuage de points, dans un sens à préciser. Il s'agit de minimiser une certaine distance entre la droite et les points du nuage

$\leadsto$ Calcul de la solution

$$a = \frac{Cov(x,y)}{Var(x)},$$

$$b = E(y) - E(x)\frac{Cov(x,y)}{Var(x)}$$



Minimisation sans contrainte

- Loi de Snell Descartes
  Minimisation de temps de parcoursn une dimension
  Pas de contrainte
- Regrression linéaire
  Minimisation géométrique en deux dimensions
  Pas de contrainte

Minimisation sans contrainte

- Loi de Snell Descartes
  Minimisation de temps de parcoursn une dimension
  Pas de contrainte
- Regrression linéaire
  Minimisation géométrique en deux dimensions
  Pas de contrainte
- Dérivation en dimension p
  Proposition : Si une fonction J de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable, alors
  $$J'(x) = (\partial_1 J, \partial_2 J, ..., \partial_p J)^T$$

Minimisation sans contrainte

- Loi de Snell Descartes
  Minimisation de temps de parcoursn une dimension
  Pas de contrainte
- Regrression linéaire
  Minimisation géométrique en deux dimensions
  Pas de contrainte
- Dérivation en dimension p
  Proposition : Si une fonction J de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ est dérivable, alors

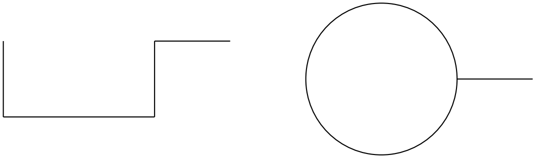
$$J'(x) = (\partial_1 J, \partial_2 J, ..., \partial_p J)^T$$

Proposition : Si une fonction J de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ est deux fois dérivable, alors

$$J''(x) = \begin{pmatrix} \partial_{11} J & \partial_{12} J & \dots & \partial_{1p} J \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{p1} J & \partial_{p2} J & \dots & \partial_{pp} J \end{pmatrix}$$

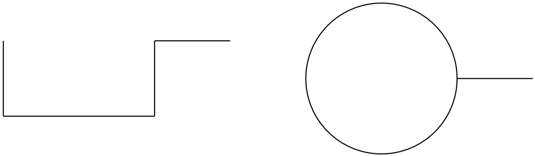
Et si on ajoute une contrainte

- Quelle est la forme d'une casserole qui minimise la surface de métal pour une contenance V donnée ?



Et si on ajoute une contrainte

- Quelle est la forme d'une casserole qui minimise la surface de métal pour une contenance V donnée ?

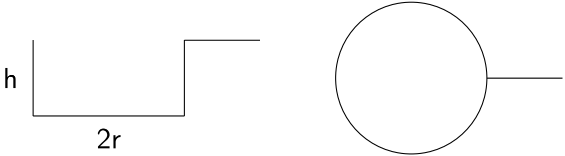


$\rightsquigarrow$ Quelle est la dimension du problème ?

A : 1 B : 2 C : 3 D : Plus

Et si on ajoute une contrainte

- Quelle est la forme d'une casserole qui minimise la surface de métal pour une contenance V donnée ?

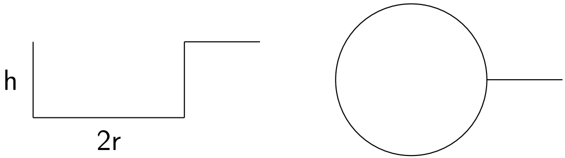


$\rightsquigarrow$ Quelle est la dimension du problème ?

A : 1 B : 2 C : 3 D : Plus

Et si on ajoute une contrainte

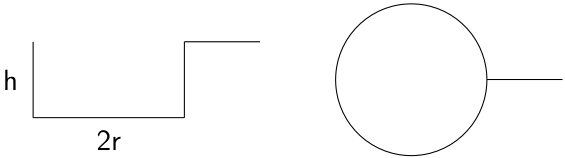
- Quelle est la forme d'une casserole qui minimise la surface de métal pour une contenance V donnée ?



$\rightsquigarrow$ Quelle est la fonction à minimiser ?

Et si on ajoute une contrainte

- Quelle est la forme d'une casserole qui minimise la surface de métal pour une contenance V donnée ?

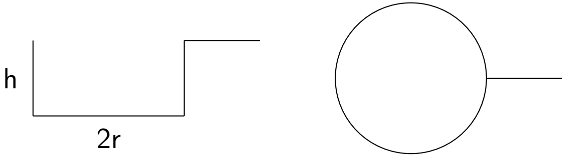


$\rightsquigarrow$ Quelle est la fonction à minimiser ?

$$S(r,h) = \pi r^2 + 2\pi rh$$

Et si on ajoute une contrainte

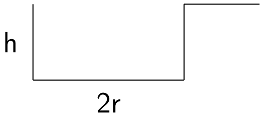
- Quelle est la forme d'une casserole qui minimise la surface de métal pour une contenance V donnée ?

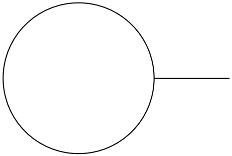


$\rightsquigarrow$ Quelle est la contrainte ?

Et si on ajoute une contrainte

- Quelle est la forme d'une casserole qui minimise la surface de métal pour une contenance V donnée ?



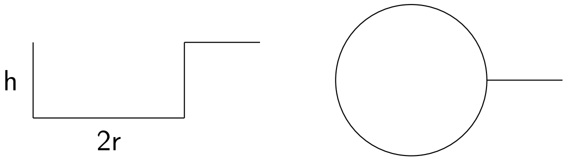


$\leadsto$ Quelle est la contrainte ?

$$\pi r^2 h = V$$

Et si on ajoute une contrainte

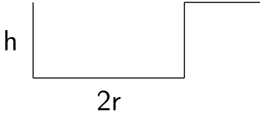
- Quelle est la forme d'une casserole qui minimise la surface de métal pour une contenance V donnée ?

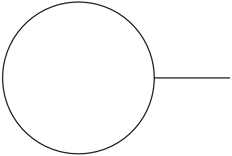


$\rightsquigarrow$ Quelle stratégie adopter ?

Et si on ajoute une contrainte

- Quelle est la forme d'une casserole qui minimise la surface de métal pour une contenance V donnée ?



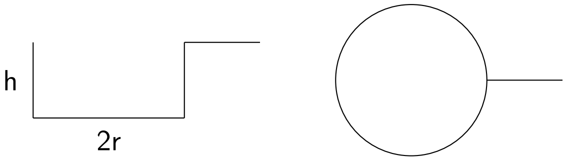


⇝ Quelle stratégie adopter ?

⇝ Utiliser la contrainte égalité pour exprimer une variable en fonction de l'autre : $h = V/(\pi r^2)$;

Et si on ajoute une contrainte

- Quelle est la forme d'une casserole qui minimise la surface de métal pour une contenance V donnée ?

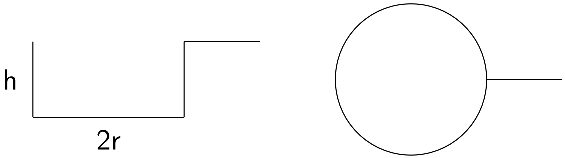


⇝ Quelle stratégie adopter ?

- ⇝ Utiliser la contrainte égalité pour exprimer une variable en fonction de l'autre : $h = V/(\pi r^2)$;
- ⇝ Résoudre le problème d'optimisation sans contrainte en dimension 1 : $\tilde{S}(r) = S(r, V/(\pi r^2))$.

Et si on ajoute une contrainte

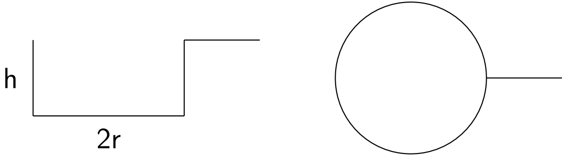
- Quelle est la forme d'une casserole qui minimise la surface de métal pour une contenance V donnée ?



$\rightsquigarrow$ Calcul de la solution

Et si on ajoute une contrainte

- Quelle est la forme d'une casserole qui minimise la surface de métal pour une contenance V donnée ?

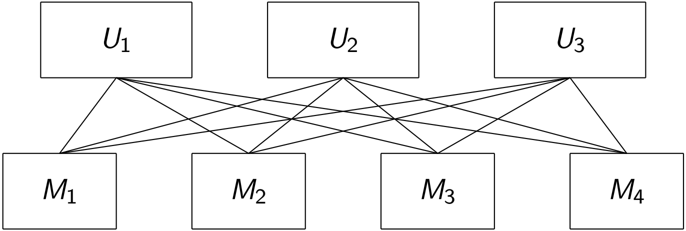


⇝ Calcul de la solution

$$\tilde{S}'(r^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^* = (V/\pi)^{1/3} \quad ; \quad h^* = V/(\pi(r^*)^2) = r^*$$

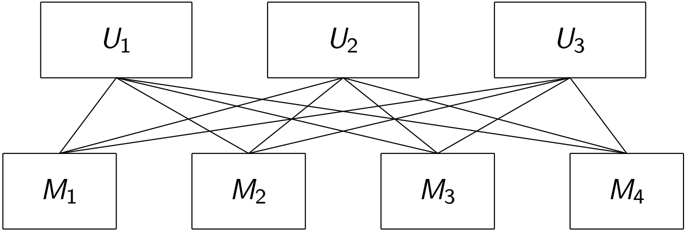
Un problème de programmation linéaire

- Comment répartir au mieux la production de trois usines dans quatre magasins ?



Un problème de programmation linéaire

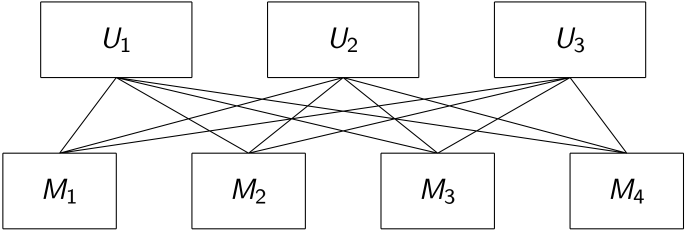
- Comment répartir au mieux la production de trois usines dans quatre magasins ?



- Données
  - Les capacités de production des trois usines C_i^u;
  - Les besoins des quatre magasins B_j^m;
  - Les coûts de transport entre une usine et un magasin c_{ij}.

Un problème de programmation linéaire

- Comment répartir au mieux la production de trois usines dans quatre magasins ?

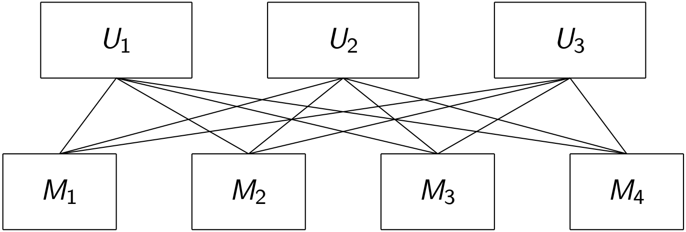


- Quelle est la dimension du problème ?

A : 1 B : 3 C : 4 D : Plus

Un problème de programmation linéaire

- Comment répartir au mieux la production de trois usines dans quatre magasins ?



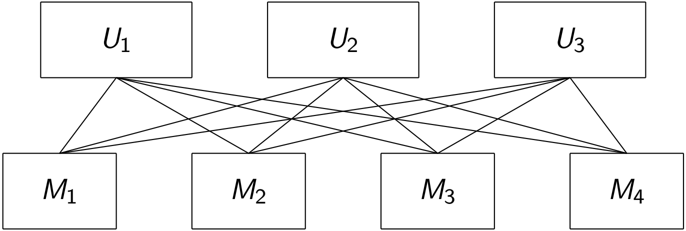
- Quelle est la dimension du problème ?

  A : 1 B : 3 C : 4 D : Plus

  Inconnues : 12

  Quantités transportées entre une usine et une magasin

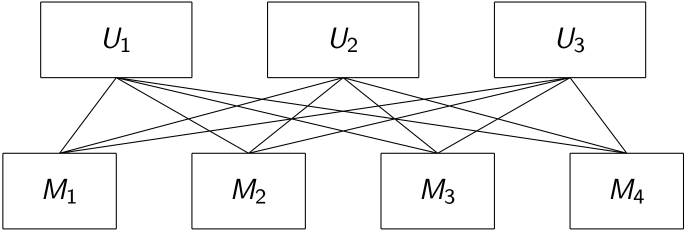
- Comment répartir au mieux la production de trois usines dans quatre magasins ?



- Fonction à minimiser :

Un problème de programmation linéaire

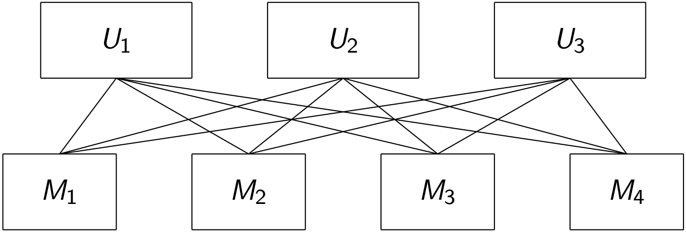
- Comment répartir au mieux la production de trois usines dans quatre magasins ?



- Fonction à minimiser :
  Coût total du transport des usines vers les magasins :

Un problème de programmation linéaire

- Comment répartir au mieux la production de trois usines dans quatre magasins ?

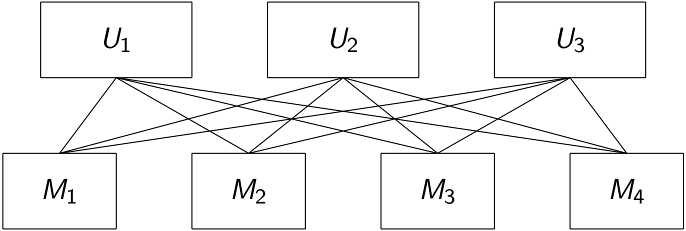


- Fonction à minimiser :
  Coût total du transport des usines vers les magasins :

$$C(q) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} q_{ij}$$

Un problème de programmation linéaire

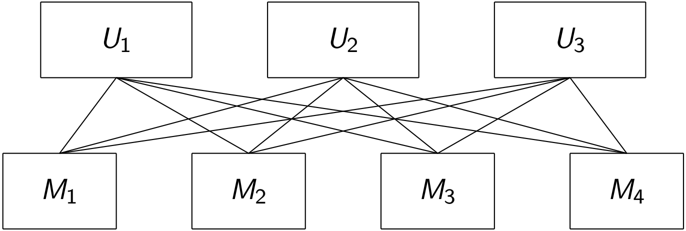
- Comment répartir au mieux la production de trois usines dans quatre magasins ?



- Contraintes :

Un problème de programmation linéaire

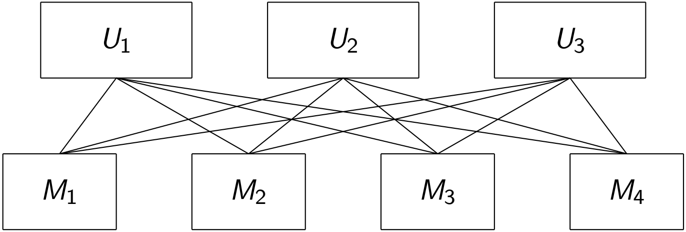
- Comment répartir au mieux la production de trois usines dans quatre magasins ?



- Contraintes :
  - Positivité des quantités transportées : $q_{ij} \geq 0$
  - Capacités de production des usines : $\sum_{j=1}^{4} q_{ij} \leq C_i^u$
  - Besoin des magasins : $\sum_{i=1}^{3} q_{ij} \geq B_j^m$

Un problème de programmation linéaire

- Comment répartir au mieux la production de trois usines dans quatre magasins ?



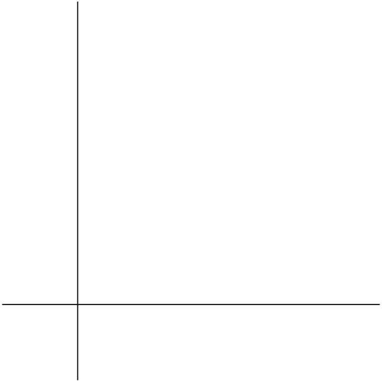
- Contraintes :
  - Positivité des quantités transportées : $q_{ij} \geq 0$
  - Capacités de production des usines : $\sum_{j=1}^{4} q_{ij} \leq C_i^u$
  - Besoin des magasins : $\sum_{i=1}^{3} q_{ij} \geq B_j^m$

$\rightsquigarrow$ Comment faire avec des contraintes inégalités ?

Une solution (partielle) : la représentation graphique

- Représenter l'ensemble des contraintes K
- Tracer les lignes de niveau de la fonction J à minimiser

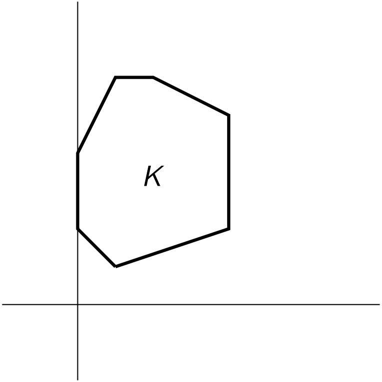
$$L_C = \{(x, y), J(x, y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$



Une solution (partielle) : la représentation graphique

- Représenter l'ensemble des contraintes K
- Tracer les lignes de niveau de la fonction J à minimiser

$$L_C = \{(x,y), J(x,y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

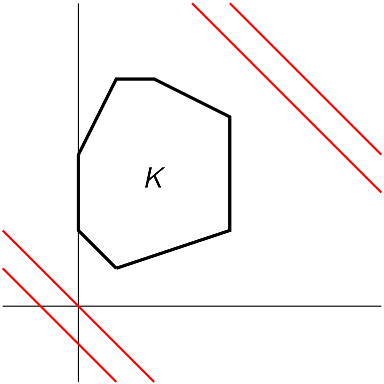


$$J(x,y) = -x - y$$

Une solution (partielle) : la représentation graphique

- Représenter l'ensemble des contraintes K
- Tracer les lignes de niveau de la fonction J à minimiser

$$L_C = \{(x, y), J(x, y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

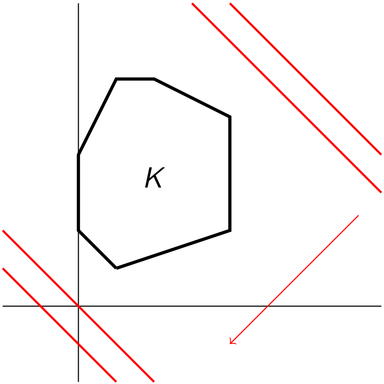


$$J(x, y) = -x - y$$

Une solution (partielle) : la représentation graphique

- Représenter l'ensemble des contraintes K
- Tracer les lignes de niveau de la fonction J à minimiser

$$L_C = \{(x,y), J(x,y) = C\}\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

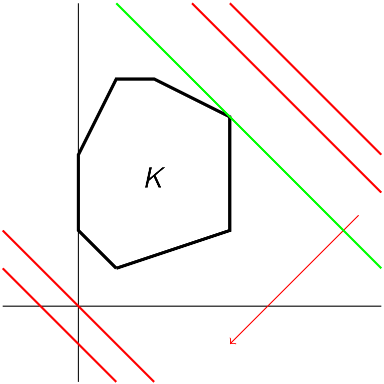


$$J(x,y) = -x - y$$

Une solution (partielle) : la représentation graphique

- Représenter l'ensemble des contraintes K
- Tracer les lignes de niveau de la fonction J à minimiser

$$L_C = \{(x, y), J(x, y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

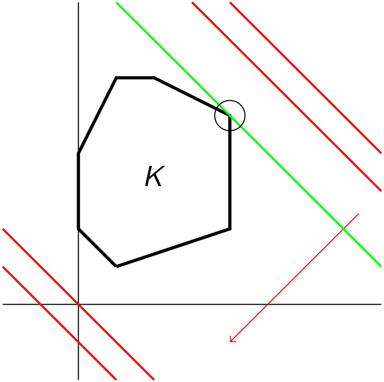


$$J(x, y) = -x - y$$

Une solution (partielle) : la représentation graphique

- Représenter l'ensemble des contraintes K
- Tracer les lignes de niveau de la fonction J à minimiser

$$L_C = \{(x,y), J(x,y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

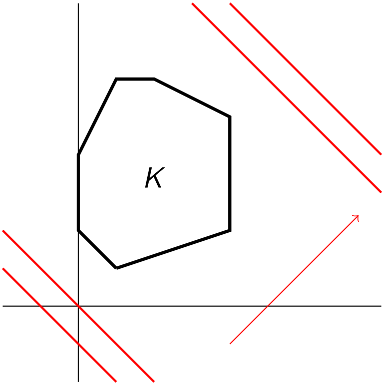


$$J(x,y) = -x - y$$

Une solution (partielle) : la représentation graphique

- Représenter l'ensemble des contraintes K
- Tracer les lignes de niveau de la fonction J à minimiser

$$L_C = \{(x,y), J(x,y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

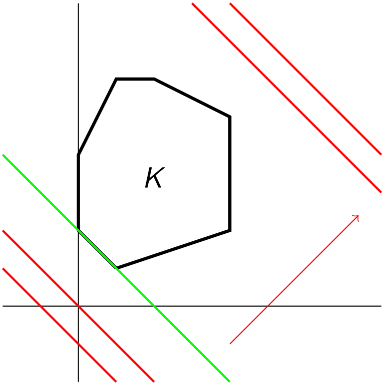


$$J(x,y) = x + y$$

Une solution (partielle) : la représentation graphique

- Représenter l'ensemble des contraintes K
- Tracer les lignes de niveau de la fonction J à minimiser

$$L_C = \{(x, y), J(x, y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

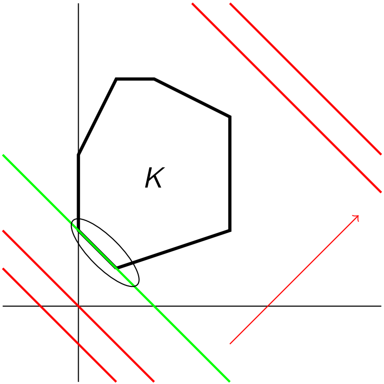


$$J(x, y) = x + y$$

Une solution (partielle) : la représentation graphique

- Représenter l'ensemble des contraintes K
- Tracer les lignes de niveau de la fonction J à minimiser

$$L_C = \{(x,y), J(x,y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

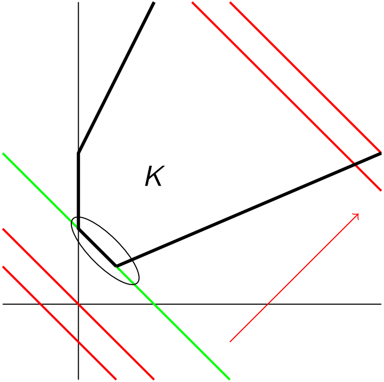


$$J(x,y) = x + y$$

Une solution (partielle) : la représentation graphique

- Représenter l'ensemble des contraintes K
- Tracer les lignes de niveau de la fonction J à minimiser

$$L_C = \{(x,y), J(x,y) = C\}\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

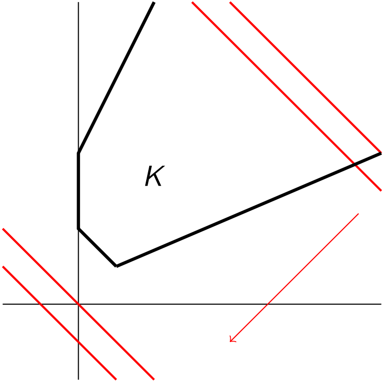


$$J(x,y) = x + y$$

Une solution (partielle) : la représentation graphique

- Représenter l'ensemble des contraintes K
- Tracer les lignes de niveau de la fonction J à minimiser

$$L_C = \{(x,y), J(x,y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

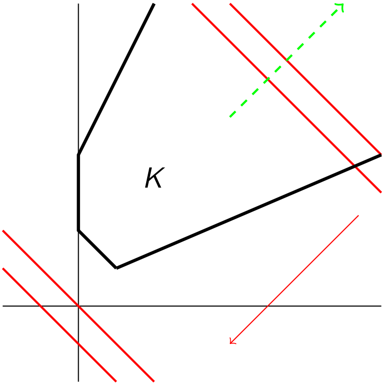


$$J(x,y) = -x - y$$

Une solution (partielle) : la représentation graphique

- Représenter l'ensemble des contraintes K
- Tracer les lignes de niveau de la fonction J à minimiser

$$L_C = \{(x,y), J(x,y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

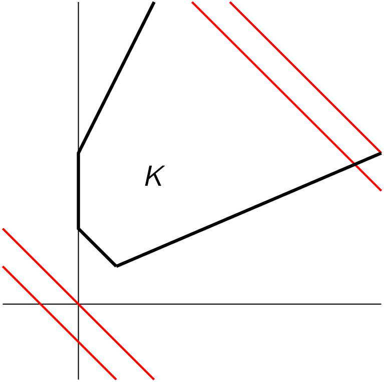


$$J(x,y) = -x - y$$

Une solution (partielle) : la représentation graphique

- Représenter l'ensemble des contraintes K
- Tracer les lignes de niveau de la fonction J à minimiser

$$L_C = \{(x,y), J(x,y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$

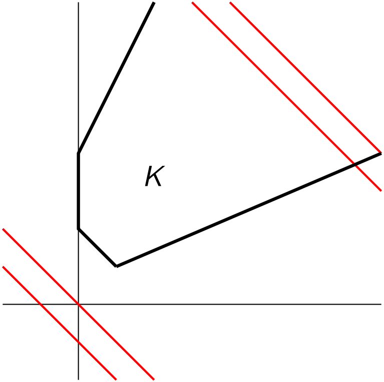


Problèmes non linéaires ?

Une solution (partielle) : la représentation graphique

- Représenter l'ensemble des contraintes K
- Tracer les lignes de niveau de la fonction J à minimiser

$$L_C = \{(x,y), J(x,y) = C\}, \quad C \in \mathbb{R}$$



Dimensions supérieures à 2 ???

Optimisation : Contexte

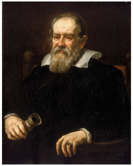
$$\underset{\mathbf{u} \in \mathbf{K}}{\mathrm{Min}} \; \mathbf{J}(\mathbf{u})$$

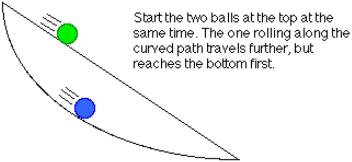
$$\underset{\mathbf{u}\in\mathbf{K}}{\mathrm{Min}}\ \mathbf{J}(\mathbf{u})$$

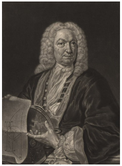
- $K \subset V$ avec V espace de Hilbert.
- J fonction différentiable
- Dimension
  - $\dim V < +\infty$: Optimisation en dimension finie ($\mathbb{R}^n$, polynômes de degré inférieur à n, espaces d'éléments finis, série de Fourier tronquée...)
  - $\dim V = +\infty$: Optimisation en dimension infinie (L^2, H^1, H_0^1...)
- Contrainte
  - $K = V$: Optimisation sans contrainte
  - $K \subsetneq V$: Optimisation sous contrainte

Optimisation en dimension infinie : brachistochrone

- Données
  - Points de départ et d'arrivée
  - Conservation de l'énergie mécanique (pas de frottement)
- Quantités d'intérêt
  - On cherche le trajet qui minimise le temps de parcours ("brachistochrone")







Optimisation en dimension infinie : brachistochrone

- Données
  - Points de départ et d'arrivée
  - Conservation de l'énergie mécanique (pas de frottement)
- Quantités d'intérêt
  - On cherche le trajet qui minimise le temps de parcours ("brachistochrone")
- Modèle mathématique

$$\operatorname*{Min}_{\mathcal{C}\in V} \int_0^T dt = \operatorname*{Min}_{\mathcal{C}\in V} \int_0^S \frac{ds}{v(s)} = \operatorname*{Min}_{f\in H_d^1(0,1)} \int_0^1 \sqrt{\frac{1+f'(x)^2}{2gf(x)}}dx$$

$\rightsquigarrow$ Equation différentielle (cycloïde)

$$J'(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1+u'(x)^2)u(x) = K$$

Optimisation : Programme de travail

- Existence d'un minimum
  - ⇝ Malédiction de la dimension infinie
- Unicité du minimum
  - ⇝ Notion de convexité
- Caractérisation du minimum
  - Conditions sur la dérivée première
  - Conditions sur la dérivée seconde
- Multiplicateurs de Lagrange
  - ⇝ Cas avec contrainte
- Algorithmes
  - Algorithmes de gradient
  - Méthode de Newton
  - Prise en compte des contraintes (gradient projeté, Uzawa, simplexe)