I SUITES

Les notions de suites et de limite d'une suite jouent un rôle central en analyse. En général, un nombre réel ne peut pas être décrit par une expression numérique finie, mais par approximations "arbitrairement bonnes", c'est-à-dire comme limite d'une suite.

1.1 Rappel : les nombres réels.

Ils sont bien sûr déjà connus, et correspondent intuitivement aux points d'une droite (marquée d'un 0 et d'un $1 \neq 0$). Plus formellement, on peut définir l'ensemble des nombres reels $\mathbb{R}$, muni de deux opérations

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

et d'une relation $<$, satisfaisant aux axiomes suivants :

(i) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps :

(A1) $(a+b)+c = a+(b+c)$, pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(A2) $a+b = b+a$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

(A3) Il existe un élément $0 \in \mathbb{R}$ avec $a+0 = a$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(A4) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $-a \in \mathbb{R}$ avec $a + (-a) = 0$.

(Π1) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

(Π2) $ab = b \cdot a$

(Π3) Il existe un élément $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, avec $a \cdot 1 = a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$

(Π4) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, il existe un élément $a^{-1} \in \mathbb{R}$ avec $a \cdot a^{-1} = 1$

(D) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(ii) $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ est un corps ordonné :

(O1) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, l'une et une seulement des assertions suivantes est vraies : $a < b$, $a = b$, ou $b < a$.

(O2) Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a : $(a < b$ et $b < c) \Rightarrow a < c$.

(O3) Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a : $a < b \Rightarrow a + c < b + c$.

(O4) Pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a : $(a < b$ et $0 < c) \Rightarrow ac < bc$.

(iii) Axiome d'Archimède : pour $a, b \in \mathbb{R}$ donnés, avec $0 < a$ et $0 < b$, il existe $n \in \mathbb{N}$ avec $b < na$.

(iv) Borne supérieure : Supposons que $A \subset \mathbb{R}$ soit non-vide, et majoré : c'est-à-dire, il existe $x \in \mathbb{R}$ avec $a \leq x$ pour tout $a \in A$ (un tel x est appelé majorant de A).
Alors A possède un majorant minimal (unique grâce à O1), que l'on note $\sup A$ et que l'on appelle la borne supérieure ou le supremum de A. Autrement dit :

- $\sup A$ est un majorant de A
- Si x est un majorant de A, alors $\sup A \leq x$.

1.2 Remarques : (i) On utilise ci-dessus la notation $(a \leq b) \Leftrightarrow (a < b$ ou $a = b)$; de même, on introduit $(a > b) \Leftrightarrow (b < a)$, etc...

(ii) Toutes les règles de calculs bien connues découlent de ces axiomes, comme par exemple : $0 \cdot a = 0$, $-(-a) = a$, etc. Cf : TD.

(iii) L'axiome (1.1. iv) est équivalent, en présence des autres axiomes, à l'existence d'une borne inférieure ou infimum, noté $\inf A$, pour tout ensemble non-vide A minoré.

1.3 Remarque : nous noterons $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Nous avons des inclusions $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Ici $\mathbb{Q}$ est aussi un corps ordonné archimédien (il sat. aux axiomes (i), (ii), (iii) de 1.1), mais ne satisfait pas à l'axiome (iv) : ce dernier permet par ex. de construire $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, mais $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x^2 \neq 2$ (cf. TD).
Il est possible de construire $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$ (cf. "Coupures de Dedekind", ou à l'aide des "suites de Cauchy" dans $\mathbb{Q}$).

<u>1.4 Rappels</u> (i) La valeur absolue de $a \in \mathbb{R}$ est définie par

$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$. Ses propriétés essentielles sont :

- $|a+b| \leq |a| + |b|$ (inégalité triangulaire)
- $|ab| = |a||b|$, et $|a/b| = |a|/|b|$ pour $b \neq 0$.
- $|a-b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$

De plus, le nombre $0 \in \mathbb{R}$ est caractérisé par la propriété suivante : $x = 0 \iff (\text{pour tout } \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon)$.

(ii) La partie entière d'un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ est l'unique entier $[a] \in \mathbb{Z}$ avec $a \leq x < a+1$ (Remarque : $[a]$ existe grâce à l'axiome d'Archimède ...).

(iii) Nous utiliserons pour les intervalles de $\mathbb{R}$ la notation habituelle
$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$, $]a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$,
$[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$, etc...

Voilà assez de rappels sur $\mathbb{R}$!

<u>1.5 Définition</u> : une suite de nombres réels est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$, que l'on note habituellement $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplement (u_n).

<u>1.6 Exemples</u> : (i) Soit $a \in \mathbb{R}$. On peut définir la <u>suite constante de valeur a</u> par $u_n = a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Certaines suites sont données par des formules explicites : p. ex $u_n = n$, ou $v_n = 2^n$, ou $w_n = \sqrt{n}$.

(iii) On peut définir une suite par récurrence : Étant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $u_0 \in \mathbb{R}$, on pose $u_{n+1} := f(u_n)$ pour tout $n \geq 0$. On dit alors que (u_n) est une suite récurrente.
Par exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$, $u_0 = 0$, on retrouve la suite (u_n) de (ii). Pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$ et $u_0 = 1$, on retrouve la suite (v_n) de (ii).

(iv) Plus généralement : comme en (iii) avec $f : I \to J$, pour $I, J \subset \mathbb{R}$. Attention : $u_0 \in I$, et u_{n+1} n'est défini que si $u_n \in I$.
A plusieurs variables : $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, u_0 et u_1 donnés, et pour $n \geq 2$, u_n est défini par récurrence par $u_n = f(u_{n-2}, u_{n-1})$.
Par exemple $f(x,y) = ax + by$, $a, b \in \mathbb{R}$: suite récurrente linéaire.

<u>1.7 Définition</u> : Une suite (u_n) de $\mathbb{R}$ est dite <u>majorée</u> (resp. <u>minorée</u>) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq M$) pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une suite (u_n) est dite <u>bornée</u> si elle est majorée <u>et</u> minorée, autrement dit : il existe $M \in \mathbb{R}$ avec $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>1.8 Définition</u> : On dit qu'une suite (u_n) de $\mathbb{R}$ <u>admet $a \in \mathbb{R}$ pour limite</u> (ou simplement <u>converge vers a</u>) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ (dépendant de ε) tel que $|u_n - a| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$.
Si une suite admet une limite, on dit qu'elle est <u>convergente</u>. Sinon, elle est <u>divergente</u>.

1.9 Examples : (i) Considérons (u_n) donné par $u_n = 1 + \frac{1}{n+1}$. Alors (u_n) converge vers $1 \in \mathbb{R}$: en effet, étant donné $\varepsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}$ avec $N > 1/\varepsilon$. Alors, si $n \geq N$, on a $|u_n - 1| = |1/n+1| = 1/n+1 < 1/N < \varepsilon$.

(ii) La suite (u_n) donnée par $u_n = (-1)^n$ diverge : Supposons par l'absurde qu'elle admette $a \in \mathbb{R}$ pour limite. Soit $\varepsilon = 1/2$; il existe alors $N \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N \Rightarrow$ $|u_n - a| < 1/2$. Prenons $k \in \mathbb{N}$ avec $2k \geq N$; alors $2 = 1-(-1) = u_{2k} - u_{2k+1} = |u_{2k} - u_{2k+1}| =$ $|u_{2k} - a + a - u_{2k+1}| \leq |u_{2k} - a| + |a - u_{2k+1}| =$ $|u_{2k} - a| + |u_{2k+1} - a| < 1/2 + 1/2 = 1$, ce qui est absurde.

1.10 Proposition : Soit (u_n) une suite convergeant vers a et vers b dans $\mathbb{R}$. Alors $a = b$.

Demonstration : Il suffit de montrer : $\forall \varepsilon > 0$, $|a-b| < \varepsilon$. Soit donc $\varepsilon > 0$ donné. Il existe $N = N(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ et $M = M(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ avec (i) $n \geq N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon/2$

(ii) $n \geq M \Rightarrow |u_n - b| < \varepsilon/2$

Soit $L = \max\{N, M\}$. Alors $|a-b| = |a - u_L + u_L - b|$ $\leq |a - u_L| + |b - u_L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. ▨

1.11. Notation : donc, si une suite (u_n) converge, sa limite est unique, et on la note $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

1.12 Proposition : Toute suite convergente est bornée.

Preuve : Soit (u_n) une suite convergente, $a = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Soit $\varepsilon = 1$; il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ avec $|u_n - a| < 1$ pour tout $n \geq N$. Alors $|u_n| = |u_n - a + a| \leq |u_n - a| + |a| < 1 + |a|$, pour tout $n \geq N$. Donc $|u_k| \leq \max\{|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, 1+|a|\}$. ▨

<u>1.13 Remarque:</u> une suite bornée n'est pas nécessairement convergente : par exemple, la suite $u_n = (-1)^n$ de 1.9 (ii) est bornée mais diverge.

<u>1.14 Definition:</u> On dit qu'une suite (u_n) tend vers ∞ (et on le note $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$) si pour tout nombre réel x, il existe $N = N(x) \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N \Rightarrow u_n > x$.
On dit que (u_n) tend vers $-\infty$, et on le note $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$, si pour tout réel x, il existe $N = N(x) \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N \Rightarrow u_n < x$. (Remarquons : les suites qui tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$ sont un cas particulier de suites divergentes).

<u>1.15 Definition:</u> Une suite (u_n) est dite <u>croissante</u> (resp. <u>strictement croissante</u>) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} > u_n$). Similairement, on definit une suite <u>décroissante</u>. Une suite est <u>monotone</u> si elle est croissante ou décroissante.

Le Théoreme suivant est facile mais très important : comme le critère de Cauchy, il permet de conclure que certaines suites convergent <u>sans</u> avoir à connaître <u>à priori</u> leur limite.

<u>1.16 Théorème</u> :
(a) Toute suite <u>croissante</u> <u>et</u> <u>majorée</u> converge.
(b) Toute suite <u>croissante</u> <u>non majorée</u> tend vers $+\infty$.
Similairement :
(c) Toute suite <u>décroissante</u> <u>et</u> <u>minorée</u> converge.
(d) Toute suite <u>décroissante</u> <u>et</u> <u>non minorée</u> tend vers $-\infty$.
<u>preuve:</u> (a) Soit (u_n) croissante et majorée. Considérons $A = \{ u_n \mid n \in \mathbb{N} \} \subset \mathbb{R}$. Alors A est non-vide et majoré ; donc il possède un supremum $a = \sup A$.
Soit $\varepsilon > 0$ choisi. Il existe un $N \in \mathbb{N}$ avec $|u_N - a| < \varepsilon$

(sinon $|u_n - a| \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $a - u_n \geq \varepsilon$, donc $u_n \leq a - \varepsilon$, et $a - \varepsilon$ est majorant de A avec $a - \varepsilon < \sup A$, ce qui contredit la définition de a).

suite croissante !

Alors, pour tout $n \geq N$, $-\varepsilon < 0 \leq a - u_n \leq a - u_N < \varepsilon$, donc $|u_n - a| < \varepsilon$. Donc $\lim_{n\to\infty} u_n = a$.

(b) Soit (u_n) une suite croissante non-majorée. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ avec $u_N > x$ (sinon (u_n) est majorée par x). Alors, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq u_N > x$. Donc $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$.

Les affirmation (c) et (d) sont démontrées de façon analogue. $\boxtimes$

<u>1.17 Exemple</u> : Considérons la suite récurrente donnée par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \geq 0$. Alors :

(a) (u_n) est minorée par 1 : par récurrence, on a

$u_0 = 2 \geq 1$ ok.

En supposant $u_n \geq 1$, on en déduit

$$u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \geq 2 - \frac{1}{1} = 1.$$

(b) (u_n) est décroissante :

$$u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = \frac{-(u_n^2 - 2u_n + 1)}{u_n} = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n} \leq 0$$

donc $u_{n+1} \leq u_n$. Donc, par 1.16 (c),

on en deduit que (u_n) converge ! Quelle est sa limite ?

Nous allons mentionner une astuce pour trouver la limite d'une suite récurrente convergente. Avant cela, un théorème utile !

<u>1.18 Théorème</u> : Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction <u>continue</u> en $a \in I$, et (u_n) une suite avec $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $\lim_{n\to\infty} u_n = a$, alors

$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(a)$.

preuve : On utilise la définition de la continuité de f en a :
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\delta > 0$ avec $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
Soit $N = N(\delta) \in \mathbb{N}$ avec $|u_n - a| < \delta$ pour $n \geq N$.
Alors $|f(u_n) - f(a)| < \varepsilon$, donc $(f(u_n))$ converge vers $f(a)$. $\boxtimes$

1.19 Exemple : Considérons la suite $u_n = \cos(\frac{1}{n})$.
La suite $v_n = \frac{1}{n}$ converge vers 0.
La fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en 0.
Donc la suite $u_n = \cos(v_n)$ converge vers $\cos(0) = 1$.

1.20 Proposition : Soit I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et (u_n) une suite avec $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ pour tout $n \geq 0$.
Si la suite u_n converge, et si $a = \lim_{n\to\infty} u_n \in I$, alors a satisfait à l'équation $f(a) = a$.
preuve : Comme f est continue en a, on a $f(a) = \lim_{n\to\infty} f(u_n)$.
Si on définit $v_n = u_{n+1}$, on a que $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} u_n = a$;
Or $v_n = f(u_n)$, donc grâce à 1.18, on en déduit :
$a = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(\lim_{n\to\infty} u_n) = f(a)$. #

1.21 Exemple : revenons à l'exemple 1.17, $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$. Considérons $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$.
C'est une fonction continue, et $u_{n+1} = f(u_n) \in]0,\infty[$ pour tout $n \geq 0$, car $u_n \geq 1$ pour tout $n \geq 0$. De plus, on a $\lim_{n\to\infty} u_n = \operatorname{Inf}\{u_n \mid n \geq 0\} \geq 1$, et on il s'ensuit donc $a = \lim_{n\to\infty} u_n \geq 1$, et $a \in]0,\infty[$.
On en déduit de 1.20 : $f(a) = a$, autrement dit
(*) $a = 2 - \frac{1}{a}$, avec $a > 0$.
Donc $a^2 - 2a + 1 = 0$, $(a-1)^2 = 0$, et $a = 1$ est l'unique solution de (*). On en déduit $\lim u_n = 1$.

1.22 Proposition (Opérations algébriques sur les suites): Soient (u_n) et (v_n) des suites, et supposons $\lim_{n\to\infty} u_n = a \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = b \in \mathbb{R}$.

(i) La suite $(u_n + v_n)$ converge vers $a+b$

(ii) La suite (λu_n) converge vers λa, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

(iii) La suite $(u_n v_n)$ converge vers ab

(iv) Si $v_n \neq 0$ pour tout n, et si $b \neq 0$, alors la suite (u_n / v_n) converge vers a/b.

(Remarque : (ii) est un cas particulier de (iii) !).

Preuve : nous laissons (i) en exercice (c'est le cas le plus facile !)

(iii) Comme (u_n) converge, elle est bornée (1.12). Soit $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec $|u_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$ donné.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ avec

$$|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2(1+|b|)} \quad \text{et} \quad |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (*)$$

pour tout $n \geq N$.

Alors $|u_n v_n - ab| = |u_n v_n - u_n b + u_n b - ab| =$

$$|u_n(v_n - b) + b(u_n - a)| \leq |u_n|\,|v_n - b| + |b|\,|u_n - a|$$

$$\leq M\,|v_n - b| + (1+|b|)\,|u_n - a| \overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(iv) Admis (preuve similaire : $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{v_n} = \frac{1}{b}$, puis utiliser (iii)). #

1.23 Proposition (Opérations avec des suites tendant vers $\pm\infty$).

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{R}$.

(i) Si $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ et (v_n) minorée, alors $\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \infty$.

Si $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$ et (v_n) majorée, alors $\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$ et (v_n) est minorée par $M > 0$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = +\infty$

Si par contre v_n est majorée par $M < 0$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = -\infty$. Discussion similaire si $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$

(iii) Si (u_n) est bornée, si $v_n \neq 0 \ \forall n$ et si $\lim_{n\to\infty} v_n = \pm\infty$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n/v_n = 0$.

(iv) Si $v_n > 0 \ \forall n$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$, et si (u_n) est minorée par $M > 0$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n/v_n = \infty$.

On a des cas similaires : $u_n \leq M < 0$, $v_n \overset{>}{\to} 0 \Rightarrow \lim u_n/v_n = -\infty$, etc...

preuve : omise.

On a aussi des relations intéressantes entre les inégalités et les limites.

1.24 Proposition : Soient (u_n) et (v_n) deux suites dans $\mathbb{R}$, avec $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) Si (u_n) et (v_n) convergent, alors $\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$.

(ii) Si $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$, alors $\lim_{n\to\infty} v_n = \infty$.

1.25 Théorème (critère des deux gendarmes) : Soient (u_n), (v_n) et (w_n) des suites dans $\mathbb{R}$ satisfaisant à

(1) $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = a \in \mathbb{R}$,

(2) il existe $K \in \mathbb{N}$, avec $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \geq K$.

Alors $\lim_{n\to\infty} v_n = a$.

preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Grâce à (1), on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ avec $w_n - a < \varepsilon$ et $u_n - a > -\varepsilon$ pour tout $n \geq N$.

Alors $-\varepsilon < u_n - a \leq v_n - a \leq w_n - a < \varepsilon$.

Donc $|v_n - a| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, et $\lim_{n\to\infty} v_n = a$. #

1.26 Proposition (suites géométriques) : Considérons $a \in \mathbb{R}$, et la suite $u_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$ (ce type de suite : suite géométrique).

(i) Si $a > 1$, alors $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$

(ii) Si $a = 1$, alors $\lim_{n\to\infty} a^n = 1$ (suite constante)

(iii) Si $0 \leq |a| < 1$, alors $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

<u>Preuve</u> : suit facilement des opérations sur les limites :

(ii) évident, car $u_n = 1 \quad \forall n$.

(i) Posons $b = a - 1 > 0$, donc $a = 1 + b$.

Alors $a^n = (1+b)^n = 1 + nb + \underbrace{\binom{n}{2} b^2 + \cdots + b^n}_{\geq 0} \geq 1 + nb$.

Or $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, donc

$\lim_{n\to\infty} nb = \infty$ (par 1.23 (ii), avec $u_n = n$ et $v_n = b \quad \forall n$)

$\lim_{n\to\infty} 1 + nb = \infty$ (par 1.23 (i)), et $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ par 1.24 (ii).

(iii) Si $a = 0$, c'est clair. Si $0 < |a| < 1$, posons $b = 1/|a|$

Alors $\lim_{n\to\infty} b^n = \infty$ par (i). Donc $\lim_{n\to\infty} |a^n| = \lim_{n\to\infty} |a|^n = \lim_{n\to\infty} 1/b^n = 0$ par 1.23 (iii). $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^n = 0$. #

<u>1.27 Example :</u> Considérons $u_n = \frac{2^n}{n!}$ (rappel : $2^0 = 1$, $0! := 1$).

Alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

En effet, posons $v_0 = v_1 = v_2 = 2$, et $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour $n \geq 3$.

Alors, si $n \geq 3$, $n! \geq 3^{n-2}$, on a

$$0 \leq u_n \leq 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 9\, v_n \quad \text{pour tout } n \geq 3.$$

Alors $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ par 1.26 (iii), $\lim_{n\to\infty} 9\, v_n = 0$ par 1.22 (ii), et $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ par les deux gendarmes.

<u>1.28 Théorème (Règle de d'Alembert pour les suites) :</u>

Soit (u_n) une suite de $\mathbb{R}$, avec $u_n \neq 0$ pour tout n, tel que $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = a \in \mathbb{R}$ existe. Alors :

(i) Si $a < 1$, on a $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

(ii) Si $a > 1$, alors (u_n) diverge.

<u>Preuve</u> : admis ; preuve par comparaison avec la série géométrique $\left(\frac{1+a}{2}\right)^n$.

<u>1.29 Exemples</u> (a) Si, dans 1.28, $a = 1$, on ne peut rien conclure : comparer $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $v_n = n$.

(b) On obtient 1.27 (de même : $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$, ce que l'on peut démontrer comme 1.27

1.30 Proposition (exemples).

(i) Si $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, alors $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(ii) Si $a \in \mathbb{R}$, $|a| \leq 1$, $p \in \mathbb{N}$ et $p \geq 1$, alors
$\lim_{n\to\infty} a^n/n^p = 0$. Si par contre $|a| > 1$, alors
$\lim_{n\to\infty} a^n/n^p = \infty$.

preuve : Analogue à 1.26 : Si $a > 0$, $a = 1+h$, $a \leq (1+\frac{h}{n})^n, \ldots$

Nous étudions maintenant le critère de Cauchy : dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}$) il détermine si une suite est convergente, sans avoir à connaître sa limite.

1.31 Définition : On dit qu'une suite de réels (u_n) est une suite de Cauchy si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tel que $|u_n - u_m| < \varepsilon$ pour tous $n, m \geq N$.

1.32 Théorème : Une suite (u_n) dans $\mathbb{R}$ est une suite de Cauchy si et seulement si elle est convergente.

preuve : nous ne démontrons ds ce cours que la direction facile : toute suite convergente est de Cauchy :
Soit (u_n) convergent vers $a \in \mathbb{R}$, et soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon/2$.
Alors, si $n, m \geq N$, on a
$|u_n - u_m| = |u_n - a + a - u_m| \leq |u_n - a| + |u_m - a|$
$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Donc (u_n) est de Cauchy.

1.33 Remarque : la réciproque utilise l'axiome de la borne supérieure ; dans $\mathbb{Q}$, les suites de Cauchy ne convergent pas nécessairement.
Par exemple, on considère la suite (u_n) de $\mathbb{Q}$ donnée par $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 2/x_n}{2}$.

En utilisant la méthode de l'exemple 1.17 – 1.21, il est possible de prouver que (u_n) converge vers $\sqrt{2}$ dans $\mathbb{R}$ (seule solution de $f(x) = x$, $x > 0$ pour $f(x) = \frac{x + 2/x}{2}$). En particulier, (u_n) est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, donc de $\mathbb{Q}$, mais ne converge pas dans $\mathbb{Q}$).

<u>1. 34 Exemple (approximation décimale)</u> :

Soit x un nombre réel ≥ 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{[10^n \cdot x]}{10^n}$ (où $[y]$ désigne la partie entière de y). En particulier, $u_n \in \mathbb{Q}$, et de plus u_n a un développement décimal fini. Nous avons

$$[10^n x] \leq 10^n x < [10^n x] + 1 \quad , \quad \text{donc}$$

$$u_n \leq x < u_n + 1/10^n \quad , \quad \text{donc}$$

$$x - 1/10^n < u_n \leq x \, , \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La suite géométrique $v_n = \frac{1}{10^n}$ converge vers 0, donc $w_n = x - 1/10^n$ converge vers x.

Par le critère des deux gendarmes, on en déduit $\lim_{n \to \infty} u_n = x$.

En fait, plus précisément, $|a - u_n| < 1/10^n$.

Remarquons aussi que u_n est croissante si $x > 0$.

La suite (u_n) s'appelle <u>l'approximation décimale</u> de x.

Si $x < 0$, son approximation décimale est $(-v_n)$, où v_n est l'approximation décimale de $-x$.

<u>1. 35 Rappel</u> : nous allons rapidement discuter des suites de nombres complexes. Rappelons que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un corps donc satisfait aux axiomes énumérés dans <u>1. 1. (i)</u>.

Par contre, $\mathbb{C}$ n'a pas de relation d'ordre $<$ faisant

de lui un corps ordonné. Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est souvent noté $z = a+bi$, où, par cette notation, on entend généralement $a, b \in \mathbb{R}$ (même si $a+bi$ fait sens pour $a, b \in \mathbb{C}$). Dans ce cas, $\operatorname{Re} z := a \in \mathbb{R}$ est appelé la partie réelle de z, et $\operatorname{Im} z := b$ sa partie imaginaire. Le nombre $\bar{z} = a - bi$ est appelé le conjugué complexe de $z = a+bi$.
On a une injection de corps $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $a \mapsto a + 0i$ (que l'on note a). On identifie $\mathbb{R}$ à son image; un nombre complexe $z = a+bi$ est donc dit réel si $b = 0$. En d'autres termes, $z \in \mathbb{C}$ est réel ssi $z = \bar{z}$. Le module de $z = a+bi$ est le nombre réel $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Si z est réel, son module égale la valeur absolue de z. Rappelons les règles:

(1) $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$

(2) $(a+bi) \cdot (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$ (en part. $i^2 = -1$)

(3) Si $z \neq 0$, alors $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$.

(4) $z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \cdot i$

(5) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

(6) $z \mapsto \bar{z}$ est un automorphisme involutif du corps $\mathbb{C}$:

$$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \bar{\bar{z}} = z \quad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

(7) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, $|z| = |\bar{z}|$.

(8) $|zw| = |z|\,|w|$; si $w \neq 0$, $|z/w| = |z|/|w|$.

(9) $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

(10) $|z| \leq \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$

(11) $|z+w| \leq |z| + |w|$

(12) Le nombre $0 \in \mathbb{C}$ est caractérisé par:

$z = 0 \iff$ pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, $|z| < \varepsilon$.

La définition de la limite d'une suite de nombres complexes est la même que pour les suites réelles

1.36 Définition : On dit qu'une suite de nombres complexes (w_n) admet $z \in \mathbb{C}$ pour limite si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ avec $|w_n - z| < \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on dit que (w_n) converge (vers z). Si (w_n) n'admet pas de limite, on dit qu'elle diverge.

1.37 Remarques. De nombreux résultats vu pour les réels sont valables pour les complexes, avec la même démonstration (en remplaçant la valeur absolue par le module).
Par exemple, toute suite complexe convergente a une seule limite, et est nécessairement bornée ((w_n) est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ avec $|w_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$).
De même, les opérations algébriques sur les suites convergentes (1.22) restent valables. Par contre, puisque $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné, les notions de suites croissantes, décroissantes, ne sont pas définies (à moins qu'elles soient réelles).
La proposition suivante permet de rapporter l'étude de la convergence des suites complexes à celle des suites réelles.

1.38 Propositions : la suite complexe $(z_n = u_n + v_n i)$ converge vers $w = a + bi$ si et seulement si les suites réelles (u_n) et (v_n) convergent vers a et $b \in \mathbb{R}$, respectivement.

preuve : Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n i) = a + bi$ (opérations sur les limites complexes).
Inversement, supposons $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n i) = a + bi$. Soit $\varepsilon > 0$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N \Rightarrow |(u_n + v_n i) - (a + bi)| = |(u_n - a) + (v_n - b)i| < \varepsilon$. Par $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$ on a $|u_n - a| < \varepsilon$ et $|v_n - b| < \varepsilon$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = b$.
#

1.39 Théorème: Une suite complexe converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

1.40 Exemple: La série géométrique complexe $w_n = a^n$, $a \in \mathbb{C}$,

(a) converge vers 0 si $|a| < 1$

(b) diverge si $|a| > 1$

1.41 Remarque: Les résultats 1.18, 1.20 et 1.28 ont une version analogue pour les suites complexes.