II SÉRIES NUMÉRIQUES

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Nous énonçons les définitions et résultats pour $\mathbb{K}$, sauf s'il est nécessaire de se spécialiser à $\mathbb{R}$.

2.1 Définition : Ou appelle série de terme général u_n, ou simplement série, le couple formé d'une suite (u_n) de $\mathbb{K}$ et de la suite (S_n), où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k .$$

On appelle u_n le n-ième terme et S_n la n-ième somme partielle de la série.

Notation : on désigne souvent par $\sum u_n$ la série de terme général u_n.

2.2 Définition : La série de terme général u_n est dite convergente si la suite des sommes partielles $\left(S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n\right)$ converge. Dans ce cas, la limite $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ est appelée la somme de la série et est dénotée $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.

2.3 Remarque : attention à la notation : $\sum u_n$ désigne la série de terme général u_n, qu'elle converge ou non. Si elle converge, alors $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ désigne sa somme (donc $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n \in \mathbb{K}$)

2.4 Remarque : lorsque l'on étudie la convergence d'une série de terme général u_n, on peut bien sûr "oublier" un nombre fini de termes sans en changer la convergence. Mais si elle converge, ceci modifie sa somme !

2.5 Proposition : Si la série de terme général u_n converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.

Preuve : Si la série converge, alors la suite des sommes partielles (S_n) converge, donc est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ avec $|S_k - S_\ell| < \varepsilon$ pour tout $k, \ell \geq N$ en particulier $|u_n| = |S_n - S_{n-1}| < \varepsilon$ pour tout $n \geq N+1$. Donc $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$. #

Donc pour que la série de terme général u_n converge, il est nécessaire que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Nous verrons en 2.7 que ce n'est pas suffisant !

<u>2.6 Définition</u> : On dit que la série de terme général u_n <u>diverge grossièrement</u> si (u_n) ne converge pas vers $0 \in \mathbb{K}$.

<u>2.7 Exemple</u> : La série de terme général u_n défini par $u_0 = 0$, $u_n = 1/n$ diverge (mais pas grossièrement).
Pour le voir, il suffit de vérifier que la suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy : mais, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|S_{2n} - S_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{(n+1)} + \frac{1}{(n+2)} + \dots + \frac{1}{(2n-1)} + \frac{1}{2n} \geq$$

$$\underbrace{\frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ fois}} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Donc il n'existe pas de $N \in \mathbb{N}$ avec $|S_m - S_n| < 1/2$ pour tout $m, n \geq N$. #

<u>2.8 Théorème (critère de Cauchy)</u> : La série de terme général u_n est convergente si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 0$, on ait $|u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon$.

<u>preuve</u> : C'est le critère de Cauchy pour la convergence de (S_n) #

(ne pas confondre avec la règle de Cauchy que nous verrons).

<u>2.9 Proposition</u> (Opérations sur les séries) : Supposons que les séries de terme général u_n et v_n convergent. Alors

(i) La série de terme général u_n+v_n converge, et l'on a
$$\sum_{n=0}^{\infty}(u_n+v_n) = \sum_{n=0}^{\infty}u_n + \sum_{n=0}^{\infty}v_n .$$

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors la série de terme général λu_n converge, et
$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda u_n = \lambda\sum_{n=0}^{\infty}u_n$$

<u>preuve</u> : (i) Soient (S_n), (T_n), (V_n) les suites de sommes partielles de $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum(u_n+v_n)$. Alors
$$V_n = (u_0+v_0)+(u_1+v_1)+\ldots+(u_n+v_n) =$$
$$=(u_0+u_1+\ldots+u_n)+(v_0+v_1+\ldots+v_n) = S_n+T_n .$$
Donc, par les opérations sur les suites (1.22, 1.37), on a
$$\sum_{n=0}^{\infty}(u_n+v_n) = \lim_{n\to\infty}V_n = \lim_{n\to\infty}S_n+T_n = \lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}T_n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}u_n + \sum_{n=0}^{\infty}v_n .$$
(ii) Si W_n est la suite des sommes partielles de la série de t.g. λu_n, alors $W_n = \lambda S_n$, donc, similairement,
$$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda u_n = \lim_{n\to\infty}W_n = \lim_{n\to\infty}\lambda S_n = \lambda\lim_{n\to\infty}S_n = \lambda\sum_{n=0}^{\infty}u_n .$$
#

<u>2.10 Proposition</u> : (i) Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n+v_n)$ diverge.

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \lambda u_n$ aussi, pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\neq 0$.

<u>preuve</u> : (i) Sinon, si $\sum(u_n+v_n)$ converge, alors $\sum v_n$ aussi, par 2.9, avec $\sum_{n=0}^{\infty}v_n = \sum_{n=0}^{\infty}(u_n+v_n)-\sum_{n=0}^{\infty}u_n$, ce qui est absurde. (ii) idem, avec $\frac{1}{\lambda}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\lambda u_n$. #

<u>2.11 Proposition</u> (Séries réelles à termes positifs). Soit $\sum u_n$ une série avec $u_n\in\mathbb{R}$ et $u_n\geq 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Soit (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum u_n$. Alors $\sum u_n$ converge ssi la suite (S_n) est majorée.

preuve : puisque les termes sont positifs, la suite (S_n) est croissante, donc (S_n) converge si et seulement si elle est bornée, par 1.16. #

<u>2.12 Proposition (comparaison)</u> : Soient Σu_n et Σv_n des séries avec $u_n, v_n \in \mathbb{R}$ pour tout n, et telles que

$(*)$ $\quad 0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq 0$.

(i) Si Σv_n converge, alors Σu_n aussi, et les sommes satisfont à $\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$

(ii) Si Σu_n diverge, alors Σv_n aussi.

<u>preuve</u> : (ii) Supposons que Σu_n diverge ; comme u_n est positif, la suite des sommes partielles S_n est croissante, et non-bornée, donc $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$.
Puisque $(*) \Rightarrow S_n \leq T_n$ pour tout n, (où (T_n) est la suite des sommes partielles de Σv_n), on en déduit $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$, donc Σv_n diverge.
(i) Par contraposée de (ii), Σu_n converge. Comme $S_n \leq T_n$ pour tout n, $\lim_{n\to\infty} S_n \leq \lim_{n\to\infty} T_n$, donc $\sum_{n=0}^{\infty} S_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} T_n$. #.

<u>2.13 Remarque</u> : Si, dans 2.12, on remplace $(*)$ par $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq k$, $k \in \mathbb{N}$ donné, alors (ii) est vrai aussi ; et si Σv_n converge, alors Σu_n aussi, et on a $\sum_{\underline{\underline{n=k}}}^{\infty} u_n \leq \sum_{\underline{\underline{n=k}}}^{\infty} v_n$.

<u>2.14 Exemple</u> : Soit $p \geq 2$. Nous allons montrer que $\Sigma \frac{1}{n^p}$ converge : Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$ la s. partielle.

(i) $p = 2$: si $n \geq 1$, on a

$$1 \leq S_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^2 \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

Donc, S_n est croissante (car $u_n \geq 0 \ \forall n$) et majorée par 2, donc $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} S_n$ existe.
Si $p > 2$, alors $0 \leq 1/n^p \leq 1/n^2$ pour tout $n \geq 1$, donc, grâce à 2.12, $\sum 1/n^p$ converge aussi. #

2.15 Lemme : Supposons donnée une série de terme général $u_n \in \mathbb{C}$. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries réelles $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent, et dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Re}(u_n) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Im}(u_n)\right)\cdot i$$

preuve : Suit de 1.38 car, si $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$, on a $S_n = T_n + U_n i$, où $T_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(u_n)$ et $U_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}(u_n)$. #

2.16 Définition : On dit que la série $\sum u_n$ de terme général $u_n \in \mathbb{K}$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ de terme général $|u_n| \in \mathbb{R}$ est convergente.

2.17 Théorème (convergence absolue) : Si une série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.
Dans ce cas, les sommes vérifient $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

preuve : (a) Supposons $u_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et soit $v_n = |u_n| - u_n$, donc $v_n \geq 0$. En particulier
$v_n = |v_n| = \big||u_n| + (-u_n)\big| \leq |u_n| + |u_n| = 2|u_n|$.
Puisque $\sum |u_n|$ est supposée convergente, et $0 \leq v_n \leq 2|u_n|$ pour tout n, il suit de 2.12 que $\sum v_n$ est convergente.
Il suit alors de 2.9 i+ii que la série de terme général $u_n = |u_n| - v_n$ est convergente.
(b) Si $u_n \in \mathbb{C}$, soit $a_n = \mathrm{Re}(u_n)$, $b_n = \mathrm{Im}(u_n)$

donc $u_n = a_n + b_n i$. Grâce à la propriété du module 1.35 (3), on a $0 \leq |a_n| \leq |u_n|$ et $0 \leq |b_n| \leq |u_n|$, donc si $\sum |u_n|$ converge, alors $\sum |a_n|$ et $\sum |b_n|$ aussi, grâce à 2.12. Il suit de (a) ci-dessus que $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, donc, par 2.15, $\sum u_n = \sum a_n + b_n i$ aussi.

(c) Finalement, si $\sum |u_n|$ converge, alors pour les sommes partielles $S_n = u_0 + \ldots + u_n$ et $T_n = |u_0| + \ldots + |u_n|$ de $\sum u_n$ et $\sum |u_n|$, respectivement, on a

$$|S_n| \leq T_n \quad \text{pour tout } n. \text{ Donc}$$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| = \left|\lim_{n\to\infty} S_n\right| = \lim_{n\to\infty} |S_n| \leq \lim_{n\to\infty} T_n = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

(Remarque: dans la seconde =, on utilise que $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe et que $x \mapsto |x|$ est continue). #

<u>2.18 Remarque</u>: Ce théorème est important, car il permet souvent de démontrer qu'une série $\sum u_n$ converge en se rapportant à une série réelle à termes positifs, à savoir $\sum |u_n|$. Pour ce genre de séries, on peut alors souvent utiliser 2.12.
Notons encore: la somme de deux séries absolument convergentes est abs. convergente, par comparaison: $0 \leq |u_n + v_n| \leq |u_n| + |v_n|$.

<u>2.19 Proposition</u> (critère des <u>séries alternées</u>): Soit (u_n) une suite de nombres réels satisfaisant aux propriétés suivantes:
(a) il existe une suite de nombres réels <u>décroissante</u> (a_n) avec <u>$a_n \geq 0$</u> pour tout n, et $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n a_n$
(donc u_n alterne entre des nombres positifs et négatifs)
Alors la série de terme général (u_n) converge.
[Exemple: $\sum 1/n$ diverge (vu en 2.7), mais par 2.19, $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ converge]

preuve : nous utilisons le critère de Cauchy (2.8). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \geq 0$. Il faut estimer $|u_n + \dots + u_{n+p}|$. On a plusieurs cas :

(i) n est pair : $u_n = a_n \geq 0$

(i1) p est pair : on a $0 \leq \overbrace{(a_n - a_{n+1}) + \dots + (a_{n+p-2} + a_{n+p-1})}^{\geq 0} + a_{n+p} = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p} = a_n + \underbrace{(-a_{n+1} + a_{n+2}) + \dots + (-a_{n+p-1} + a_{n+p})}_{\leq 0} \leq a_n$, donc, en conclusion :

$0 \leq u_n + \dots + u_{n+1} \leq a_n$.

(i2) p est impair : $0 \leq (a_n - a_{n+1}) + \dots + (a_{n+p-1} - a_{n+p}) = u_n + \dots + u_{n+p} = a_n + \underbrace{(-a_{n+1} + a_{n+2})}_{\leq 0} + \dots + \underbrace{(-a_{n+p-2} + a_{n+p-1})}_{\leq 0} - a_{n+p} \leq a_n$

même conclusion !

(ii) n est impair ; $u_n = -a_n \leq 0$

(ii1) p est pair : on a $-a_n \leq -a_n + \overbrace{(a_{n+1} - a_{n+2})}^{\geq 0} + \dots + (a_{n+p-1} - a_{n+p}) = u_n + \dots + u_{n+p} = \underbrace{(-a_n + a_{n+1})}_{\leq 0} + \dots + \underbrace{(-a_{n+p-2} + a_{n+p-1})}_{\leq 0} - a_{n+p} \leq 0$,

donc en conclusion $-a_n \leq u_n + \dots + u_{n+p} \leq 0$.

(ii2) p est impair : on $0 \geq (-a_n + a_{n+1}) + \dots + (-a_{n+p-1} + a_{n+p}) = u_n + \dots + u_{n+1} = -a_n + (a_{n+1} - a_{n+2}) + \dots + (a_{n+p-2} - a_{n+p-1}) + a_{n+p} \geq -a_n$, même conclusion !

Donc (i) + (ii) $\Rightarrow$: $0 \leq |u_n + \dots + u_{n+p}| \leq a_n$, pour tout $n \geq 0$ et tout $p \geq 0$.

Montrons que la série de t.g. u_n satisfait au critère 2.8 :

Soit $\varepsilon > 0$.

Puisque $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N \Rightarrow |a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$. Donc, si $n \geq N$, et si $p \geq 0$, on a $0 \leq |u_n + \dots + u_{n+p}| \leq a_n = |a_n| < \varepsilon$.

Donc le critère de Cauchy est satisfait, et $\sum u_n$ converge !

2.20 Proposition (Séries géométriques) : Soit $x \in \mathbb{K}$. On appelle série géométrique de raison x la série de terme général $u_n = x^n$.

(i) Si $|x| < 1$, alors la série géométrique converge et
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(ii) Si $|x| \geq 1$, alors la série géométrique de raison x diverge (gross.).

preuve : (ii) Si $|x| \geq 1$, alors $|x^n| = |x|^n \geq 1$, et la suite (x^n) ne converge pas vers 0, donc $\sum x^n$ diverge grossièrement.

(i) Si $|x| < 1$, on a en particulier $x \neq 1$. Si $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ dénote la nième somme partielle, alors $(1-x) \cdot S_n = (1-x) + (1-x)x + \dots + (1-x)x^n = 1 + (-x+x) + \dots + (-x^n + x^n) - x^{n+1} = 1 - x^{n+1}$

donc $S_n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Puisque $|x| < 1$, on a $\lim_{n \to \infty} x^n = 0$ (1.26 + 1.40), donc, par les opérations sur les suites (1.22), on en déduit : (S_n) converge, et
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1-x}.$$
#

Par comparaison avec une série géométrique, on obtient les critères suivants

2.21 Proposition (Règle de Cauchy). Soit (u_n) une suite avec $u_n \in \mathbb{R}$, $u_n \geq 0$. S'il existe $K \in \mathbb{R}$, $0 \leq K < 1$ avec $\sqrt[n]{u_n} \leq K$ pour tout n, alors la série de terme général u_n converge.

preuve : On a alors $0 \leq u_n \leq K^n$. Comme on suppose $|K| < 1$, $\sum K^n$ converge ; par comparaison (2.12) la série $\sum u_n$ converge aussi.
#

2.22 Proposition (critère de d'Alembert pour les séries) : Soit $\sum u_n$ une série de terme général $u_n \in \mathbb{R}$ avec $u_n > 0$ pour tout n. Supposons $\lim_{n \to \infty} (u_{n+1}/u_n) = l \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

(ii) Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

(iii) Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

<u>preuve :</u> (i) Si $\ell < 1$, on choisit $K \in \mathbb{R}$ avec $\ell < K < 1$.
Comme $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N \Rightarrow$ $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \ell\right| < K - \ell$, donc $u_{n+1}/u_n < K$. En ignorant les N premiers termes de la série, on ne change pas la convergence.
On peut donc supposer $u_{n+1}/u_n \leq K$ pour tout $n \geq 0$.
Alors $0 \leq u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_1}{u_0} \cdot u_0 \leq K^n \cdot u_0$.
Or, par 2.20 (et opérations sur les séries), $\sum K^n \cdot u_0$ converge, donc par comparaison, $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\ell > 1$, on choisit $K \in \mathbb{R}$ avec $1 < K < \ell$.
De même, on peut supposer (en ignorant suffisamment de termes) que $u_{n+1}/u_n \geq K$, donc, similairement à ci-dessus, $u_n \geq K^n u_0 > u_0$ (car $K > 1 \Rightarrow K^n > 1$). Donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(iii) En effet, $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, mais dans les deux cas $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = 1$. #

<u>2.23 Proposition</u> (Séries de Riemann) : Soit $a \in \mathbb{R}$, avec $a > 0$. Alors la série $\sum 1/n^a$ de terme général $1/n^a$ (appelée série de Riemann)

(i) converge si $a > 1$

(ii) diverge si $a \leq 1$

preuve : nous avons vu que $\sum 1/n^2$ converge ; par comparaison, $\sum 1/n^a$ aussi, pour $a \geq 2$, car $0 \leq \frac{1}{n^a} \leq \frac{1}{n^2}$.
De même, nous avons vu que $\sum 1/n$ diverge, donc $\sum 1/n^a$ pour $a \leq 1$ aussi, car $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^a}$ dans ce cas.
Le cas $a \in]1, 2[$ est plus difficile ; nous l'admettons. #

Par comparaison avec les séries de Riemann, on obtient un critère intéressant. On a besoin d'un lemme:

<u>2.24 Lemme</u> : Soient Σu_n et Σv_n deux séries réelles avec $u_n \geq 0$ et $v_n > 0$ pour tout n. Supposons que la suite (u_n/v_n) converge, avec $\lim_{n \to \infty} (u_n/v_n) = \ell \neq 0$. Alors Σu_n converge si et seulement si Σv_n converge.

<u>preuve</u> : Comme $u_n/v_n \geq 0$ et $\ell \neq 0$, on a $\ell > 0$. Soit $\varepsilon = \ell/2$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N \Rightarrow$ $|u_n/v_n - \ell| < \ell/2$, donc, si $c = \ell - \ell/2$ et $d = \ell + \frac{\ell}{2}$

$$c < u_n/v_n < d, \text{ et donc } c v_n < u_n < d v_n$$

Comme $c = \ell/2$, on a $c \neq 0$.

Si Σv_n diverge, alors $\Sigma c v_n$ aussi, et par comparaison, Σu_n aussi. Si Σu_n diverge, alors, par comparaison, $\Sigma d v_n$ aussi, et donc Σv_n aussi. #

<u>2.25 Théorème (Règle de Riemann)</u> : Soit Σu_n une série réelle avec $u_n \geq 0$ pour tout n, et soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

(i) Si la suite $(n^a u_n)$ converge vers $\ell \neq 0$, alors Σu_n converge si et seulement si $a > 1$

(ii) si la suite $(n^a u_n)$ converge vers 0, et si $a > 1$, alors Σu_n converge

(iii) Si $\lim_{n \to \infty} n u_n = \infty$, alors Σu_n diverge.

<u>preuve</u>: (i) On pose $v_n = 1/n^a$, alors $\frac{u_n}{v_n} = n^a u_n$, et par hypothèse $\lim_{n \to \infty} u_n/v_n = \ell \neq 0$. Par 2.24, Σu_n converge si et seulement si $\Sigma v_n = \Sigma \frac{1}{n^a}$ converge, donc si et seulement si $a > 1$ par 2.23.

(ii) On peut supposer (en ignorant les premiers termes) que $0 \leq n^a u_n \leq 1$ pour tout n, donc $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n^a}$. On conclut par comparaison et 2.23.

(iii) similaire, avec $n u_n \geq 1$ si n assez grand, donc $u_n \geq 1/n$. #

2.26 Remarque : La règle de Cauchy (2.21), le critère de d'Alembert (2.22), et la règle de Riemann ne sont valables que pour des séries <u>réelles</u> $\sum u_n$ de terme général $u_n \geq 0$ (ou $u_n > 0$ pour le d'Alembert). Pour les séries $\sum u_n$ avec $u_n \in \mathbb{C}$, ou $u_n \in \mathbb{R}$ pas forcément ≥ 0, on peut souvent appliquer ces critères à $\sum |u_n|$ puis utiliser le théorème de convergence absolue 2.17.

2.27 Exemple (Développement décimal) : Soit $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$. Nous avons vu (1.34) l'approximation décimale (u_n) de x : c'est la suite $u_n = \dfrac{[10^n x]}{10^n} \in \mathbb{Q}$ avec $\lim_{n\to\infty} u_n = x$. Nous avons vu que

$$(*) \qquad x - \frac{1}{10^n} < u_n \leq x \qquad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Remarquons aussi que la suite (u_n) est croissante :

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{10^n}\Big(\underbrace{[10^n x] - 10[10^{n-1}x]}_{\geq 0}\Big) \geq 0$$

≥ 0 car $10[10^{n-1}x] \in \mathbb{Z}$ et $10[10^{n-1}x] \leq 10^n x$

donc $10[10^{n-1}x] \leq [10^n x]$.

Posons $d_0 = u_0 = [x]$. Nous définissons les décimales $d_1, d_2, d_3 \ldots$ de x (on aura $x = d_0, d_1 d_2 \ldots$) par $\boxed{d_n = 10^n (u_n - u_{n-1})}$, pour tout $n \geq 1$.

On a donc $d_n = [10^n x] - 10[10^n x] \in \mathbb{Z}$, et on a vu que c'est ≥ 0, donc $d_n \in \mathbb{N}$.

<u>Affirmation ①</u> : $0 \leq d_n \leq 9$. En effet, par $(*)$, on a

$$10^n x - 1 < 10^n u_n \leq 10^n x \qquad (i)$$

et $10^{n-1}x - 1 < 10^{n-1}u_{n-1} \leq 10^{n-1}x$, donc, avec $\cdot(-10)$

$$-10^n x \leq -10^n u_{n-1} < 10 - 10^n x \qquad (ii)$$

Alors $(i) + (ii)$ donne $d_n = 10^n u_n - 10^n u_{n-1} < 10$, ce qui démontre l'affirmation.

<u>Affirmation ②</u> : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{10^n} = x$

En effet, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{10^n} = \lim_{n\to\infty} S_n$, avec

$$S_n = d_0 + \frac{d_1}{10} + \dots + \frac{d_n}{10^n} = u_0 + \frac{10(u_1-u_0)}{10} + \dots + \frac{10^n(u_n-u_{n-1})}{10^n}$$
$$= u_0 + (u_1-u_0) + \dots + (u_{n-1}-u_{n-2}) + (u_n-u_{n-1}) = u_n,$$

donc $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} u_n = x$, ce qui prouve ②.

On appelle d_n la <u>n-ième décimale</u> de x, et on écrit $x = d_0, d_1 d_2 d_3 d_4 \dots$

Par exemple : $1/3 = 0,33333\dots$

Si on se donne une suite quelconque $(d_n)_{n\geq 0}$, avec $d_n \in \mathbb{N}$ et si $n \geq 1$, $0 \leq d_n \leq 9$, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} d_n/10^n$ converge (par comparaison avec $9 \cdot \underbrace{\sum \left(\frac{1}{10}\right)^n}$, $\to$ série géométrique de raison < 1.).

Il est facile de vérifier que si deux nombres réels >0 sont égaux si et seulement si leur partie entière (d_0) et leur décimales sont les mêmes..

Finalement, notons que "$0,999\overline{9}\dots = 1$", car

$$0,999\overline{9} \cdot 9 = 0,999\overline{9} \cdot (10-1) =$$
$$9,999\overline{9} - 0,999\overline{9} = 9$$, puis diviser par 9.

Ceci contredit l'unicité du développement décimal ?

Non, car en fait, ci dessus, si $x = d_0, d_1 d_2 d_3 \dots$, alors il n'existe aucun $k \in \mathbb{N}$ avec $d_n = 9$ pour tout $n \geq k$. Sinon, on aurait

$$x = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{d_n}{10^n} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{9}{10^n} = u_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{9}{10^n} =$$
$$u_{k-1} + \frac{9}{10^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = u_{k-1} + \frac{9}{10^k} \underbrace{\left(\frac{1}{1-1/10}\right)}_{=\frac{10}{9}} = u_{k-1} + \frac{1}{10^{k-1}}$$

↯ avec (*)