III SÉRIES ENTIÈRES

Nous étudions dans ce chapitre certaines séries dépendant d'une variable $z \in \mathbb{K}$, qui, sous l'hypothèse qu'elles convergent, définissent des fonctions souvent très utiles.

3.1 Définition : Soit (a_n) une suite dans $\mathbb{K}$. Si $z \in \mathbb{K}$, la série $\sum a_n z^n$ de terme général $a_n z^n \in \mathbb{K}$ s'appelle une <u>série entière</u>, et les nombres a_n s'appellent <u>les coefficients</u> de la série entière $\sum a_n z^n$. Les <u>sommes partielles</u> de la série entière sont données par

$$S_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

3.2 Exemples : (i) Si $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient la série entière $\sum z^n$: pour $z \in \mathbb{K}$, c'est la série géométrique de raison z. Rappelons qu'elle converge si et seulement si $|z| < 1$.

<u>Question</u> : la "règle" $z \mapsto \sum a_n z^n$ définit-elle une fonction ? Si oui, quelles sont ses propriétés ? Commençons par étudier son domaine de définition (dans l'exemple 3.2, c'est $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$).

3.3 Lemme : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, $a_n \in \mathbb{K}$. Considérons le sous-ensemble $I = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0, \sum |a_n r^n| \text{ converge}\}$. Alors I est un <u>intervalle</u> de $\mathbb{R}$ contenant 0 (donc, soit $I = [0, \infty[$, ou alors I est majoré, dans quel cas on a $I = [0, R]$ ou $I = [0, R[$, avec $R = \sup I$).

<u>preuve</u> : La série $\sum |a_n (0)^n|$ a pour terme général $|a_0|$ si $n = 0$, et 0 si $n \geq 1$, donc converge vers $|a_0|$. Donc $0 \in I$.

Supposons que $r \in I$, et soit $0 \leq t \leq r$. Alors $0 \leq t^n \leq r^n$ pour tout n ; or $|a_n r^n| = |a_n| r^n$, donc $0 \leq |a_n t^n| = |a_n| t^n \leq |a_n| r^n = |a_n r^n|$. Puisque $\sum |a_n r^n|$

converge, on sait, par comparaison, que $\sum |a_n t^n|$ converge aussi. Donc $t \in I$, pour tout $0 \leq t \leq r$. En résumé, si $r \in I$, alors $[0, r] \subset I$. Ceci implique que I est un intervalle. #

<u>3.4 Definition</u> : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et $I = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0, \sum |a_n r^n| \text{ converge}\} \subset \mathbb{R}$ l'intervalle défini ci-dessus.

(i) Si I est majoré, soit $R = \sup I$ (donc $I = [0, R]$ ou $[0, R[$)

On appelle $R \in \mathbb{R}$ le <u>rayon de convergence</u> de la série entière $\sum a z^n$.

(ii) Si I n'est pas majoré, alors on dit que $\sum a z^n$ a un rayon de convergence infini, noté $R = \infty$.

<u>3.5 Proposition</u> : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

(i) Si son rayon de convergence est fini, donc $R \in \mathbb{R}$, alors la série $\sum a_n z^n$ <u>converge absolument</u> (en particulier converge) pour tout $z \in \mathbb{K}$ avec $|z| < R$, et elle diverge grossièrement pour tout $z \in \mathbb{K}$ avec $|z| > R$.

(ii) Si son rayon de convergence est infini, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{K}$.

<u>preuve</u> : cela suit de la définition du rayon de convergence, hormis l'assertion dans (i) : si $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement, c'est à dire la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0. Supposons par l'absurde que $\lim_{n\to\infty} a_n z^n = 0$; Choisissons $R < r < |z|$. Comme $\lim_{n\to\infty} a_n z^n = 0$, de même $\lim_{n\to\infty} |a_n z^n| = 0$, donc cette suite est majorée ; soit M un majorant de $\{|a_n z^n| \mid n\}$. On a alors

$$0 \leq |a_n r^n| = |a_n| r^n = |a_n| |z|^n \left(\frac{r}{|z|}\right)^n = |a_n z^n| \left(\frac{r}{|z|}\right)^n \leq M \left(\frac{r}{|z|}\right)^n.$$

Or, comme $r < |z|$, $\frac{r}{|z|} < 1$, donc la série géométrique $\sum \left(\frac{r}{|z|}\right)^n$ converge ; il suit que $\sum M \left(\frac{r}{|z|}\right)^n$ converge aussi, par comparaison. Finalement, comme $0 \leq |a_n r^n| \leq M \left(\frac{r}{|z|}\right)^n$, par comparaison, $\sum |a_n r^n|$ converge. Or $r > R \Rightarrow \sum |a_n r^n|$ diverge $\lightning$.

3.6 Exemples

(i) La série géométrique $\sum z^n$ a pour rayon de convergence 1.

(ii) La série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ a pour rayon de convergence 1 : en effet, pour $z \in \mathbb{C}$, on a que le terme général de la série $\sum \left|\frac{z^n}{n}\right|$ est $u_n = \frac{|z|^n}{n}$. On en déduit que (si $z \neq 0$)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{|z|^{n+1}}{|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot |z| = |z|.$$

Donc, par la règle de d'Alembert,

$\sum \left|\frac{z^n}{n}\right|$ converge si $|z| < 1$ et diverge si $|z| > 1$.

On en déduit que le rayon de convergence est ≥ 1 et ≤ 1, donc est 1.

(iii) Le même argument donne : le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$ est 1.

(iv) La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence ∞ : En effet, $\sum \left|\frac{z^n}{n!}\right|$, de terme général $u_n = \frac{|z|^n}{n!}$, converge pour tout z par la règle de d'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \cdot |z|, \text{ donc } \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 \text{ pour tout } z.$$

3.7 Remarque : si $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout z, alors son Rayon de convergence est infini.

Sinon, si on a $R \in \mathbb{R}$ avec

$\sum |a_n z^n|$ converge pour $|z| < R$, et

$\sum |a_n z^n|$ diverge pour $|z| > R$,

alors R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Dans ce cas, si $|z| = R$, on ne peut rien conclure de général sur la convergence de $\sum a_n z^n$. En effet :

(i) $\sum z^n$ a un rayon de conv. de 1, et $\sum z^n$ diverge pour tout z avec $|z| = 1$

(ii) $\sum \frac{z^n}{n}$ a un r. de c de 1 ; $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge, mais $\sum \frac{(1)^n}{n}$ non.

(iii) $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument pour tout z avec $|z| \leq 1$.

3.8 Remarque : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière,

(a) Si $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence infini, alors la série entière définit une fonction $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ (fonction associée). On peut bien sûr la restreindre à $\mathbb{R}$, et si de plus $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on obtient une fonction
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum a_n x^n$.

(b) Si $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R \in \mathbb{R}$, alors la série entière définit une fonction $B(0,R) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, (fonction associée). Ici $B(0,R)$ désigne la boule ouverte de centre 0 et de Rayon R dans $\mathbb{C}$:

$$B(0,R) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < R \}$$

De même, si $a_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient une fonction $]-R, R[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum a_n x^n$
(notons : $]-R, R[= \mathbb{R} \cap B(0,R)$).

3.9 Exemple : Si on reprend l'exemple de la série géomét. 3.2 $\sum z^n$, dont le rayon de convergence est donc 1, on obtient une fonction
$$\sum z^n : \begin{array}{l} B(0,1) \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum z^n \end{array}$$
En fait, par 2.20, on sait que cette fonction coïncide avec
$B(0,1) \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \dfrac{1}{1-z}$.

3.10 Théorème (Opérations sur les séries) : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières ; soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, et R' celui de $\sum b_n z^n$.

(i) Si $\lambda \in \mathbb{K} \setminus 0$, alors $\sum a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

(ii) Soit R'' le rayon de convergence de la somme de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, à savoir $\sum (a_n + b_n) z^n$.
Alors $R'' \geq \mathrm{Min}(R, R')$.

(ici $R, R', R'' = \infty$ sont autorisés, interprétation évidente).

preuve : (i) Si $\lambda \neq 0$ et $z \in \mathbb{K}$, on sait que $\sum |a_n z^n|$ converge si et seulement si $\sum |\lambda a_n z^n|$ converge. Donc $\sum a_n z^n$ et $\sum \lambda a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

(ii) Supposons $|z| < \min(R, R')$; alors $\sum |a_n z^n|$ et $\sum |b_n z^n|$ convergent, donc $\sum |a_n z^n + b_n z^n| = \sum |(a_n+b_n) z^n|$ aussi (voir fin de la remarque 2.18). On en déduit $R'' \geq \min(R, R')$. #

3.11 Définition : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Sa série dérivée est la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ (elle s'obtient en "dérivant" chacun des termes généraux $a_n z^n$ à l'intérieur de la somme).

3.12 Proposition Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.

preuve : Soit $\sum a_n z^n$ avec rayon de convergence R, et soit R' le rayon de conv. de $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$.

Soit $z \in \mathbb{K}$ avec $|z| < R'$

$$0 \leq |a_{n+1} z^{n+1}| \leq (n+1) |a_{n+1} z^{n+1}| = |z| \, |(n+1) a_{n+1} z^n| .$$

Par comparaison, comme $\sum |n+1 \, a_{n+1} z^n|$ converge, la série $\sum |a_{n+1} z^{n+1}|$ converge aussi. Donc $\sum |a_n z^n|$ aussi, et donc $|z| < R$. Ainsi, on a montré : $|z| < R' \Rightarrow |z| < R$, ce qui implique $R' \leq R$.

Il reste à montrer $R \leq R'$. Si $R = 0$, c'est bon ; Supposons $R \neq 0$; soit $z \in \mathbb{K}$ avec $|z| < R$; soit r avec $|z| < r < R$ choisi. Alors $\sum |a_n r^n|$ converge, donc $\lim_{n \to \infty} |a_n r^n| = 0$ et la suite $(|a_n r^n|)$ est majorée par un $M \in \mathbb{R}$ choisi.

Alors $0 \leq |(n+1)\, a_{n+1}\, z^n| = |(n+1)\, a_{n+1}|\, r^n \left(\frac{|z|}{r}\right)^n =$
$|a_{n+1}\, r^{n+1}| \left(\frac{n+1}{r}\right) \cdot \left(\frac{|z|}{r}\right)^n \leq M \left(\frac{n+1}{r}\right)\left(\frac{|z|}{r}\right)^n = u_n .$
Or la série numérique $\Sigma\, u_n$ converge par le critère de d'Alembert : $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{n+1}\ \frac{|z|}{r}\right) = \frac{|z|}{r} < 1 .$
Par comparaison, $\Sigma\, |(n+1) a_{n+1}\, z^n|$ converge aussi, donc $|z| < R'$. On en déduit $R \leq R'$. Ainsi, $R = R'$. #

3.13 Remarque : En considérant la série dérivée de la série dérivée de $\Sigma\, a_n z^n$, on en déduit que les séries entières

$\Sigma\, a_n z^n$ et $\Sigma\, (n+2)(n+1)\, a_{n+2}\, z^n$ ont le même rayon de convergence.

3.14 Théorème : Soit $\Sigma\, a_n z^n$ une série entière, et soit R son Rayon de convergence. Considérons la fonction associée

$$f : B(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}\ , \quad z \longmapsto f(z) = \Sigma\, a_n z^n .$$

Alors la fonction $B(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto \Sigma\, (n+1)\, a_{n+1}\, z^n$ est la dérivée de f.
(Autrement dit : on peut "dériver" une fonction série entière "terme-à-terme" : $(\Sigma\, a_n z^n)' = \Sigma\, (a_n z^n)' =$
$\Sigma\, (n+1)\, a_{n+1}\, z^n$).

(+ 3.15)

preuve : Par définition, si $z \in B(0,R)$ est fixé

$$f'(z) = \lim_{\substack{\omega \in B(0,R) \\ \omega \neq z}} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} \quad (\text{si cette limite existe !}).$$

Or on veut montrer : $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, z^n$

Il faut pour cela que si ω est proche de z, donc si $|\omega - z|$ est "petit", alors $\frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, z^n = (*)$ est petit.

Choisissons r avec $|z| < r < R$, et supposons ω proche de z, plus précisément $|\omega - z| < r - |z|$. En particulier, on a $|\omega| = |\omega - z + z| \leq |\omega - z| + |z| < r - |z| + |z| = r$, et donc $\omega \in B(0,R)$.

L'expression (*) est la somme d'une série absolument convergente (car $\omega, z \in B(0,R)$, et par 3.12 $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ est aussi absolument convergente pour $z \in B(0,R)$). Son n-ième terme général est

$$a_n\left(\frac{\omega^n - z^n}{\omega - z} - n z^{n-1}\right) = a_n\left(\omega^{n-1} + \omega^{n-2} z + \dots + \omega z^{n-2}\right.$$

$$\left. + z^{n-1} - n z^{n-1}\right) = a_n\left((\omega^{n-1} - z^{n-1}) + (\omega^{n-2} z - z^{n-1}) + \dots +\right.$$

$$\left. + (\omega z^{n-2} - z^{n-1})\right) =$$

$$= a_n\left((\omega^{n-1} - z^{n-1}) + (\omega^{n-2} - z^{n-2}) z + \dots + (\omega - z) z^{n-2}\right) =$$

$$= a_n(\omega - z)\left(\frac{\omega^{n-1} - z^{n-1}}{\omega - z} + \frac{\omega^{n-2} - z^{n-2}}{\omega - z} z + \dots + \frac{(\omega - z)}{(\omega - z)} z^{n-2}\right) = (*)$$

Or $\left|\dfrac{\omega^k - z^k}{\omega - z}\right| = \left|\omega^{k-1} + \omega^{k-2} z + \dots + \omega z^{k-2} + z^{k-1}\right| \leq k r^{k-1}$

car $|\omega|, |z| < r$. Donc

$$|(*)| < |a_n|\,|\omega - z|\left((n-1) r^{n-2} + (n-2) r^{n-3} \cdot r + \dots + 2 r r^{n-3} + r^{n-2}\right)$$

$$= |a_n|\,|\omega - z|\left(1 + 2 + \dots + (n-1)\right) r^{n-2} = \frac{1}{2} n(n-1) |a_n|\,|\omega - z|\, r^{n-2}.$$

On sait par 3.12 que $\sum n(n-1)|a_n| r^{n-2}$ converge absolument, donc $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) |a_n| r^{n-2} =: K \in \mathbb{R}$.

On obtient donc

$$\left|\frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n\right| < \frac{1}{2} K |\omega - z| \quad \text{si}$$

$|\omega - z| < r - |z|$. Ceci prouve que $\displaystyle\lim_{\omega \to z} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$.

\#

<u>3.15 Corollaire</u> : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et soit R son rayon de convergence. Soit $f : B(0,R) \to \mathbb{C}$, $z \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la fonction associée. Alors f est indéfiniment dérivable (au sens complexe). En particulier, f est continue, ainsi que toutes ses dérivées, et la dérivée $f'(z)$ de f est la fonction associée à la <u>série dérivée</u> de $\sum a_n z^n$: $f' : B(0,R) \to \mathbb{C}$

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

<u>preuve</u> : Suit de 3.14 et 3.12, par récurrence sur n, où $f^{(n)}$ est la n-ième dérivée de f.

Rappelons qu'une fonction différentiable en z est continue en z : en effet, dans ce cas

$$\lim_{w\to z} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = f'(z) \in \mathbb{K}, \text{ et puisque } \lim_{w\to z} w-z = 0,$$

on a $0 = \lim\limits_{w\to z} w-z \cdot \lim \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = \lim\limits_{w\to z} (f(w)-f(z)) =$
$(\lim\limits_{w\to z} f(w)) - f(z)$, donc $\lim\limits_{w\to z} f(w) = f(z)$, ce qui implique la continuité de f en z. #

<u>3.16 Corollaire</u> : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, et R son rayon de convergence ; Soit $f : B(0,R) \to \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ sa fonction associée. Considérons la série entière

$$0 \cdot z^0 + \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n.$$

Alors le rayon de convergence de cette série est R, et sa fonction associée $F : B(0,R) \to \mathbb{C}$ est la primitive de f qui s'annule en 0 : $F(0) = 0$ et $F'(z) = f(z)$, pour tout $z \in B(0,R)$.

<u>preuve</u> : Suit de 3.12 et 3.14, car la série dérivée de $0 z^0 + \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$ est $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. #

<u>3.17 Définition</u> Soit $U \subset \mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction. Soit $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, tel que $B(0,r) \subset U$.
On dit que f est <u>développable en série entière sur $B(0,r)$</u> s'il existe une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence $R \geq r$, telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in B(0,r)$.

3.18 Proposition: Soit $R > 0$, et soit $f : B(0,R) \to \mathbb{C}$ une fonction développable en série entière, avec $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in B(0,R)$. Alors, si $n \geq 0$, le polynôme

$$P_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

est le développement limité d'ordre de n de f en 0.

preuve: par définition: il faut vérifier $\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \neq 0}} \frac{f(z) - P_n(z)}{z^n} = 0$.

On a, pour tout $z \in B(0,R)$, $f(z) = P_n(z) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k = P_n(z) + z^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1} z^k$.

Donc, si $z \neq 0$, $g(z) := \frac{f(z) - P_n(z)}{z^n} = z \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1} z^k$,

où $\sum a_{k+n+1} z^k$ converge par 3.12 et comparaison;

On en déduit $0 = 0 \cdot a_{n+1} = \lim_{z \to 0} z \cdot \lim_{z \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n+1} z^k = \lim_{z \to 0} g(z)$. #.

3.19 Corollaire: Soit $f : B(0,R) \to \mathbb{C}$ développable en série entière sur $B(0,R)$, avec $R > 0$. Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour tout $z \in B(0,R)$, on a $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$, où $f^{(n)}$ désigne la n-ième dérivée de f.

preuve: $f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1)\, a_{n+k} z^n$,

donc $f^{(k)}(0) = k!\, a_k$. #.

À l'aide des séries entières, on peut définir rigoureusement certaines fonctions déjà rencontrées.

3.20 Lemme + Définition: La série entière $\sum \frac{1}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini. On appelle fonction exponentielle (de base e) la fonction associée, et on la note

$$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(z).$$

On a de même sa restriction aux réels: $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

preuve: Par de d'Alembert, il est clair que $\sum \frac{1}{n!} z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. #

3.21 Proposition : La fonction $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a les propriétés suivantes :

(i) $\exp(w+z) = \exp(w) \cdot \exp(z)$ pour tout $w, z \in \mathbb{C}$.

(ii) exp est indéfiniment dérivable et $\exp' = \exp$.

(iii) Si on pose $e = \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, alors $\exp(r) = e^r$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

preuve : pour démontrer (i), on utilise le produit des séries et des séries entières, que nous mentionnerons plus tard (3.29). Voir l'exemple 3.32. (ii) suit de 3.12, car la série dérivée de $\sum \frac{z^n}{n!}$ est $\sum \frac{z^n}{n!}$.

(iii) Si $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$, on a $\exp\left(\frac{1}{q}\right)^q = \exp\left(\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}\right) = \exp(1) = e$; or $\exp\left(\frac{1}{q}\right) \in \mathbb{R}$, ≥ 0, donc $\exp\left(\frac{1}{q}\right) = e^{\frac{1}{q}}$. Si $p \in \mathbb{N}$, $\exp\left(\frac{p}{q}\right) = \exp\left(\frac{1}{q} + \dots + \frac{1}{q}\right) = \left(e^{1/q}\right)^p = e^{p/q}$. Finalement, $1 = \exp(0) = \exp\left(\frac{p}{q} - \frac{p}{q}\right) = e^{\frac{p}{q}} \cdot \exp\left(-\frac{p}{q}\right)$, donc $\exp\left(-\frac{p}{q}\right) = 1/e^{\frac{p}{q}} = e^{-\frac{p}{q}}$. #

3.22 Exemples (les fonctions trigonométriques)

(i) $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, défini par $\cos(x) = \mathrm{Re}(\exp(ix))$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série numérique complexe $\sum \frac{(ix)^n}{n!}$ converge absolument, donc la série

$$\mathrm{Re}\left(\sum \frac{(ix)^n}{n!}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum i^n \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

converge absolument aussi.
On a donc $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right)$, est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

(ii) $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, défini par $\sin(x) = \mathrm{Im}(\exp(ix))$ $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $\mathrm{Im}\left(\sum i^n \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ converge absolument.
On a donc $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$

(iii) Par 3.12 et 3.14, on a donc $\cos'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)'$
$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sin(x)$.

De même, $\sin'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right)' = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)'$ (38)

$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2k!} = \cos(x).$

(iv) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $z = a+bi$, on obtient la relation :

$\exp(z) = \exp(a+bi) = \exp(a) \cdot \exp(bi) = \exp(a)\big(\operatorname{Re}(\exp(bi)) + i\operatorname{Im}(\exp(bi))\big) = \exp(a)\big(\cos(b) + i\sin(b)\big)$

(v) On peut déduire des formules ci-dessus des relations trigonométriques bien-connues : par exemple les formules d'addition : si $a, b \in \mathbb{R}$,

$\cos(a+b) + i\sin(a+b) = \exp(i(a+b)) = \exp(ia) \cdot \exp(ib)$

$= (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) =$

$\cos(a)\cdot\cos(b) - \sin(a)\sin(b) + i(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b))$,

donc $\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b). \end{cases}$

De même, on a, pour $z \in \mathbb{C}$

$\exp(\bar{z}) = \sum \frac{(\bar{z})^n}{n!} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{(\bar{z})^n}{n!} \overset{\text{conj. = Autom. de corps.}}{=} \lim_{k\to\infty} \overline{\sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!}}$

$\underset{\text{conj. continue}}{=} \overline{\lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\exp(z)}.$

Si x est réel, alors $\exp(-ix) = \exp(\overline{ix}) = \overline{\exp(ix)}$

donc $|\exp(ix)|^2 = \exp(ix)\cdot\overline{\exp(ix)} = \exp(ix)\cdot\exp(-ix)$

$= \exp(ix - ix) = \exp(0) = 1.$

On en déduit par exemple $|\exp(a+bi)| = |\exp(a)|$ et

$1 = \exp(ix)\cdot\overline{\exp(ix)} = (\cos x + i\sin(x))(\cos x - i\sin x)$

$= \cos^2 x + \sin^2 x.$

3.23 Exemple (logarithme) : la fonction logarithme $\mathrm{Log} :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ peut aussi être définie comme la primitive de la fonction $]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ avec $\mathrm{Log}(1) = 0$.

Comme 0 ne fait pas partie du domaine de définition de Log, on ne peut pas développer Log en série entière.

Par contre, considérons $f :]-1,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{Log}(1+x)$. On a

$$f'(x) = \mathrm{Log}(1+x)' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)}$$

Si $|x| < 1$, on a

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

Comme $\mathrm{Log}(1+x)$ est la primitive de $\frac{1}{1+x}$ valant 0 en 0, on en déduit de 3.16 :

Pour $|x| < 1$ on a, en "intégrant" $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$:

$$\mathrm{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Similairement, $\mathrm{Log}(1-x)' = -\frac{1}{1-x}$, donc $(-\mathrm{Log}(1-x))' = \frac{1}{1-x}$, et on obtient, pour $|x| < 1$:

$$-\mathrm{Log}(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Plus généralement, si $a > 0$, et $0 < x < 2a$, on

$$\mathrm{Log}(x) = \mathrm{Log}(a + (x-a)) = \mathrm{Log}\left(a \cdot \left(1 + \frac{x-a}{a}\right)\right) =$$

$$\mathrm{Log}(a) + \mathrm{Log}\left(1 + \frac{x-a}{a}\right) = \mathrm{Log}(a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n a^n} (x-a)^n.$$

(développement " en a ").

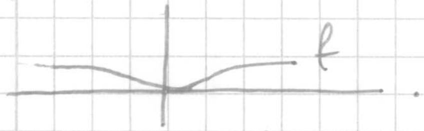
3.24 Exemple : la fonction $]-1,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé. Cette fonction est développable en série entière sur $]-1,1[$, et l'on a

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Preuve : admis ! #

3.25 Exemple : nous avons vu qu'une fonction développable en série entière admet des développements limités en 0 de n'importe quel ordre (3.18), mais la réciproque est fausse. L'exemple classique est donné par la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$



On peut vérifier que f est indéfiniment différentiable (C^∞) et que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \geq 0$.
Si f était développable en série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$, on aurait $a_n = \frac{f^{n}(0)}{n!} = 0$, donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in]-R, R[$, ce qui contredit la définition de f.
On peut toutefois énoncer le théorème suivant (admis) :

3.26 Théorème : Soit $I \ni 0$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment différentiable (C^∞). Supposons qu'il existe $r > 0$ et $k \geq 0$ tels que $]-r, r[\subset I$ et

$$|x| < r \Rightarrow |f^{(n)}(x)| \leq k \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Alors f est développable en série entière sur $]-r, r[$. #

Finalement, mentionons que les séries entières permettent parfois de calculer la valeur de certaines séries numériques.
Le résultat suivant est utile pour cela (admis) :

3.27 Proposition : Soit f une fonction réelle développable en série entière sur $]-1, 1[$, avec $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Si $\sum a_n$ converge, alors

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

(C'est bien sûr intéressant si 1 est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$).

<u>3.28 Exemple</u> : Considérons la fonction arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Rappel : c'est la fonction réciproque de

$$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R} \quad , \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

On a $\tan'(x) = 1 + (\tan(x))^2$, et on en déduit

$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Donc $\arctan' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est développable en série sur $]-1, 1[$:

$$\arctan'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Par intégration on obtient : arctan est aussi développable en série entière sur $]-1, 1[$, avec

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Or $\lim_{x \to 1} \arctan(x) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ (car $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$).

De plus, $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge par le critère des séries alternées 2.19, donc on déduit de 3.27 :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Pour terminer, nous traitons une omission : le produit des séries.

<u>3.29 Définition</u> : le <u>produit</u> de deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ de $\mathbb{K}$ est la série $\sum w_n$ dont le terme général w_n est donné par

$$w_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \dots + u_{n-1} v_1 + u_n v_0 = $$
$$= \sum_{\substack{p+q=n \\ p,q \in \mathbb{N}}} u_p v_q$$

<u>3.30 Proposition</u> : Supposons que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries absolument convergentes ; alors la série $\sum w_n$ produit de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est absolument convergente, et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right). \qquad \#$$

Remarquons que ce produit est adapté aux séries entières, puisque si $z \in \mathbb{K}$, le n-ième terme général de la série produit de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est

$$a_0 \cdot b_n z^n + a_1 z \cdot b_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_n z^n \cdot b_0 = \Big(\sum_{p+q=n,\ p,q \geq 0} (a_p b_q) \Big) z^n.$$

Donc le produit de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est une série entière $\sum \omega_n z^n$ avec $\omega_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$.

<u>3.31 Proposition</u> : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R et R', respectivement. Alors la série entière produit $\sum c_n z^n$, avec $c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q$, a un rayon de convergence R'' avec $R'' \geq \min(R, R')$.

<u>preuve</u> : suit de 3.30 comme 3.10 suit de 2.18. #

<u>3.32 Exemple</u> : soient $u, v \in \mathbb{C}$, et considérons le produit des séries entières $\sum \frac{u^n}{n!}$ et $\sum \frac{v^n}{n!}$: c'est la série $\sum \omega_n$ avec

$$\omega_n = \left(\frac{v^n}{n!} + \frac{u v^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{u^2 \cdot v^{n-2}}{2!(n-2)!} + \dots + \frac{u^{n-1} v}{(n-1)! \cdot 1!} + \frac{u^n}{n!} \right)$$

$$= \frac{1}{n!} \left(v^n + \binom{n}{1} u v^{n-1} + \binom{n}{2} u^2 v^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} u^{n-1} v + u^n \right) =$$

$$= \frac{1}{n!} (u+v)^n.$$

On déduit donc de 3.30 : $\exp(u) \cdot \exp(v) = \exp(u+v)$.