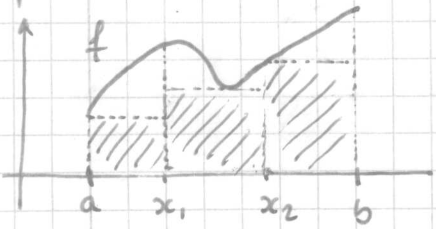
IV INTÉGRALES IMPROPRES

Dans ce chapitre, nous étendons la notion d'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ d'une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $a < b \in \mathbb{R}$ vue en première année. Commençons par un bref rappel.

4.1 Rappels :

Soient $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.



Soit $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$, $(n \geq 1)$

Soit $S_\sigma(f) = \sum_{j=1}^{n} m_j (x_j - x_{j-1})$

avec $m_j = \operatorname{Min}\{f(x) \mid x \in [x_j - x_{j-1}]\}$.

De même on pose $\overline{S}_\sigma(f) = \sum_{j=1}^{m} M_j (x_j - x_{j-1})$ avec $M_j = \operatorname{Max}\{f(x) \mid x \in [x_j - x_{j-1}]\}$. Si $m = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ et $M = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$, alors

$$m(b-a) \leq S_\sigma(f) \leq \overline{S}_\sigma(f) \leq M(b-a).$$

Donc les nombres $\operatorname{Sup}\{S_\sigma(f) \mid \sigma \text{ subdiv. de } [a,b]\}$ et

$$\operatorname{Inf}\{\overline{S}_\sigma(f) \mid \sigma \text{ subdiv. de } [a,b]\}$$

existent. On peut montrer qu'ils sont égaux, et on définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ comme étant ce nombre réel :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sup\{S_\sigma(f) \mid \sigma \text{ subd. de } [a,b]\}$$
$$\left(= \inf\{\overline{S}_\sigma(f) \mid \sigma \text{ subd. de } [a,b]\}\right).$$

Plus généralement, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est supposée bornée, les nombres sup et inf ci-dessus existent, et f est dite intégrable s'ils sont égaux (certaines propriétés ci-dessous sont valables pour les fonctions intégrables, mais nous les énonçons pour les fonctions continues seulement).

On pose $\int_a^a f(x)\,dx = 0$, et si $b < a$, on pose

$$\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx.$$

4.2 Rappels (Propriétés des intégrales) Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues.

(i) Linéarité : si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx.$$

(ii) Comparaison : Si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

De plus, on a $\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$.

(iii) Règle de Chasles : si $c \in [a,b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

(iv) Il existe $c \in [a,b]$ avec $\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) f(c)$

(v) On dit qu'une fonction différentiable $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de f si $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Si $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une autre primitive, alors il existe $c \in \mathbb{R}$ avec $G(x) = F(x) + c$ $\forall x \in [a,b]$.

Le théorème fondamental du calcul intégral : $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ défini par $x \mapsto \int_a^x f(t)\, dt$ est une primitive de f. En particulier, pour toute primitive $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ de f, on a

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(b) - G(a) =: [G]_a^b$$

(Donc le calcul d'une intégrale se ramène souvent à la recherche d'une primitive). On déduit de ce théorème les règles suivantes.

(vi) Intégration par parties :

$$\int_a^b f'(x) g(x)\, dx = [fg]_a^b - \int_a^b f(x) g'(x)\, dx$$

(vii) <u>Changement de variable</u> : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable avec $u([a,b]) \subset I$. Alors

$$\int_a^b f(u(t)) \cdot u'(t)\, dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)\, dt.$$

Passons aux <u>intégrales impropres</u> (ou généralisées).

<u>4.3 Définition :</u> (i) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, avec $a < b$, et soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue (en particulier $f : [a, x] \to \mathbb{R}$ est intégrable pour tout $x \in [a, x]$, et $\int_a^x f(t)\, dt$ est définie).

On dit que l'<u>intégrale impropre</u> $\int_a^b f(t)\, dt$ est <u>convergente</u> si $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \int_a^x f(t)\, dt$ existe ; dans ce cas, on dénote $\int_a^b f(t)\, dt$ la limite $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \int_a^x f(t)\, dt$.

(ii) Similairement, si $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $a < b$, $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ continue, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} \int_x^b f(t)\, dt$ existe, et dans ce cas on note $\int_a^b f(t)\, dt$ cette limite.

(iii) Finalement, si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < b$ et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ continue, on choisit $c \in]a, b[$, est on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente si les intégrales impropres

$$\int_a^c f(t)\, dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)\, dt$$

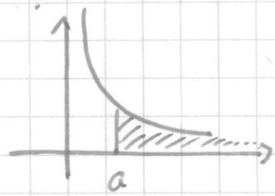
sont convergentes (au sens de (ii) et (i), respectivement).

Dans ce cas, on pose $\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^c f(t)\, dt + \int_c^b f(t)\, dt$.

(Remarque : la notion de convergence et la valeur $\int_a^b f(t)\, dt$ ne dépend pas du choix de $c \in]a,b[$ grâce à la règle de Chasles).

4.4. Remarque : le symbole $\int_a^b f(t)\,dt$ ne désigne un nombre réel que si la limite correspondante existe.

4.5 Exemple : Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Alors l'intégrale impropre $\int_a^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$, et dans ce cas on a $\int_a^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$



preuve : Si $\alpha = 1$, et si $x \geq a$, alors

$$\int_a^x \frac{1}{t}\,dt = \left[\operatorname{Log}(t)\right]_a^x = \operatorname{Log}(x) - \operatorname{Log}(a)$$

et $\lim_{x\to\infty} \operatorname{Log}(x) - \operatorname{Log}(a) = \infty$, donc $\int_a^\infty \frac{1}{t}\,dt$ diverge.

Si $\alpha \neq 1$ et $x \geq a$, alors

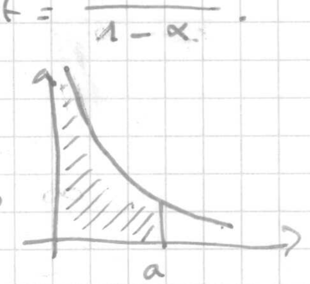
$$\int_a^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \left[\frac{1}{1-\alpha}\, t^{1-\alpha}\right]_a^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right)$$

et $\lim_{x\to\infty} x^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1, \\ \infty & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$

On en déduit que $\int_a^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ diverge si $\alpha \leq 1$ et

$$\int_a^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}\right) = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \text{ si } \alpha > 1.$$

4.6 Exemple : Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Alors l'intégrale impropre $\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$, et dans ce cas on a $\int_0^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.



preuve : Comme ci-dessus, si $\alpha = 1$, on a

$$\lim_{x \searrow 0} \int_x^a \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x \searrow 0} \left(\operatorname{Log}(a) - \operatorname{Log}(x)\right) = \infty$$

Si $\alpha \neq 1$, alors

$$\lim_{x \searrow 0} \int_x^a \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{1-\alpha}\left(a^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}\right) = \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ \infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

#

4.7 Proposition (Prolongement par continuité) : Supposons donnés $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue. Supposons que $\lim_{x \underset{<}{\to} b} f(x)$ existe ; $\lim_{x \underset{<}{\to} b} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, et soit $\tilde{f} : [a,b] \to \mathbb{R}$ la prolongation de f par continuité (donc $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in [a,b[$ et $\tilde{f}(b) = \ell$).

Alors
$$\underbrace{\int_a^b f(t)\,dt}_{(\text{impropre})} = \underbrace{\int_a^b \tilde{f}(t)\,dt}_{(\text{ordinaire})} = \left[\tilde{F}\right]_a^b$$
(où $\tilde{F}$ est une primitive de $\tilde{f}$).

preuve : $\tilde{F}$ est différentiable sur $[a,b]$, donc continue.
Si $x \in [a,b[$, alors
$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x \tilde{f}(t)\,dt = \tilde{F}(x) - F(a)$$
et on en déduit $\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt = \lim_{x \to b} (\tilde{F}(x) - \tilde{F}(a)) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)$.
#

Nous allons étudier des critères de convergence qui rappellent ceux vu pour les séries !

4.8 Remarque : ds 4.7 ci-dessus, et de même ci-dessous, nous énonçons les résultats pour $f : [a,b[\to \mathbb{R}$. On a bien sûr les résultats correspondants pour le cas $f :]a,b] \to \mathbb{R}$, et, en combinant ces deux cas, pour le cas $f :]a,b[\to \mathbb{R}$.

4.9 Proposition (linéarité) : Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que les intégrales impropres
$$\int_a^b f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_a^b g(t)\,dt$$
convergent. Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)\,dt$ converge, et
$$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt + \beta \int_a^b g(t)\,dt.$$

preuve : suit de linéarité de l'intégrale ordinaire et de la limite :
$$\lim_{x \to b} \int_a^x (\alpha f + \beta g)(t)\,dt = \lim_{x \to b} \left(\alpha \int_a^x f(t)\,dt\right) + \lim_{x \to b} \left(\beta \int_a^x g(t)\,dt\right) = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$$
#

<u>4.10 Proposition :</u> Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue avec $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b[$. Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si la fonction

$$[a,b[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{est majorée.}$$

<u>preuve</u> : Comme $f(x) \geq 0$ pour tout x, la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est croissante : en effet, si $x < y$, alors

$$\int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \overset{\text{Charles}}{=} \int_x^y f(t)\,dt \overset{f \geq 0}{\geq} 0 .$$

Donc $\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt$ existe si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est bornée (comparer avec 1.16 et 2.11). #

<u>4.11 Théorème (Comparaison)</u> : Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ continues, avec $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a,b[$.

(i) si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ aussi, et $\int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt$

(ii) Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ aussi.

<u>preuve</u> :

(i) On a $\int_a^x f(t)\,dt \overset{①}{\leq} \int_a^x g(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt \in \mathbb{R}$

donc la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est majorée par $\int_a^b g(t)\,dt$.

Donc par 4.10, $\int_a^b f(t)\,dt$ converge. Par le théorème de comparaison des limites, ① $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt \leq \lim_{x \to b} \int_a^x g(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,dt.$$

(ii) Contraposée de (i). (Comparer avec 2.12). #

<u>4.12 Théorème</u> (convergence absolue) : Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue. Si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge (on dit alors que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument), alors $\int_a^b f(t)\,dt$ aussi, et

de plus $\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$.

preuve : Posons $f^+ : [a,b[\to \mathbb{R}$, $f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0. \end{cases}$

et $f^- := f^+ - f$. Alors

$f^+(x) \geq 0$ et $f^{-1}(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b[$, ces fonctions sont continues, et $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$.

Si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge, alors, puisque

$$0 \leq f^+(x) \leq |f(x)| \quad \text{et} \quad 0 \leq f^-(x) \leq |f(x)|$$

pour tout $x \in [a,b[$, on en déduit de 4.11 que

$\int_a^b f^+(t)\,dt$ et $\int_a^b f^{-1}(t)\,dt$ convergent, donc

$\int_a^b f^+(t) - f^-(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$ aussi, par 4.9.

Finalement, $\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| = \left| \lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt \right| = \lim_{x\to b} \left| \int_a^x f(t)\,dt \right|$

$\leq \lim_{x\to b} \int_a^x |f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt$. (Comparer avec 2.17) #

$\uparrow$ 4.2. ii

<u>4.13 Exemple</u> : $\int_1^\infty e^{-t^2}\,dt$ converge, car $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$

pour tout $x \geq 1$, et $\int_1^\infty e^{-t}\,dt$ converge :

$$\int_1^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty} \left[-e^{-t} \right]_1^x = e^{-1}.$$

<u>4.14 Proposition</u> : Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ continues, $a<b$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, telles que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b[$.

Supposons que $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell > 0$. Alors

$\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge.

<u>preuve</u> : il existe $c \in [a,b[$ tel que

$$\ell/2 < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3\ell}{2} \quad \text{pour tout } x \in [c,b[$$

(par définition de $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$, en prenant $\varepsilon = \ell/2$). Alors

$\ell/2 \cdot g(x) < f(x) < \frac{3\ell}{2} \cdot g(x)$. Par 4.11, $\int_c^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_c^b g(t)\,dt$ converge. (comparer avec 2.24) #

4.15 Remarque : dans la notation de 4.14, on écrit parfois $f \underset{x \to b}{\sim} g$ si $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell > 0$.

4.16 Exemple : étudier $\int_1^\infty \frac{\sqrt{t}}{1+t^a}\, dt$ en fonction de $a > 0$.

On considère $f : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x^a}$ et $g : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^a} = \frac{1}{x^{a - 1/2}}$.

Les deux fonctions sont positives sur $[1, \infty[$, et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1+x^a}{x^a} = 1$. On sait que $\int_1^\infty g(t)\, dt$ converge si et seulement si $a - 1/2 > 1$, donc $a > 3/2$. Par 4.14, $\int_1^\infty \frac{\sqrt{t}}{1+t^a}\, dt$ converge si et seulement si $a > 3/2$.

Nous terminons sur un critère de convergence séries / intégrales :

4.17 Proposition : Soit $f : [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue décroissante et positive. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

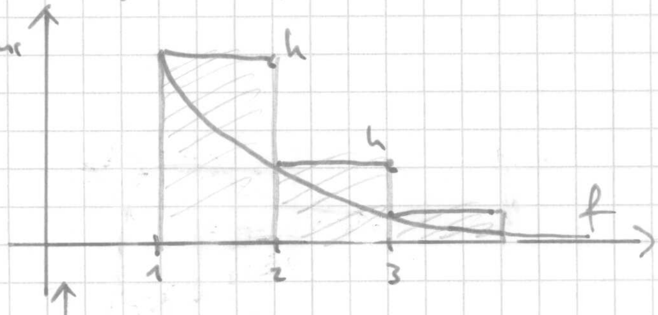
(a) L'intégrale impropre $\int_1^\infty f(t)\, dt$ converge

(b) La série $\sum\limits_{n \geq 1} f(n)$ converge.

preuve : On définit les fonctions en escalier (donc continues par morceaux)

$$\begin{cases} g(x) = f(n) \\ h(x) = f(n+1) \end{cases} \quad \text{pour } x \in [n, n+1[$$

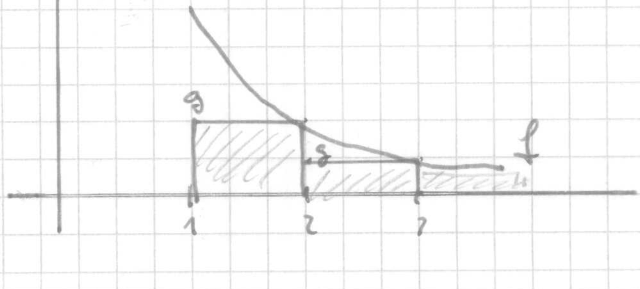
Puisque f est décroissante, on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in [1, \infty[$. On obtient donc



$$\sum_{n=2}^{N} f(n) = \int_1^N g(t)\, dt \leq \int_1^N f(t)\, dt \leq$$

$$\leq \int_1^N h(t)\, dt \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Remarquons ; puisque f est positive, $\sum f(n)$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles



est majorée (2.11), et similairement, $\int_1^\infty f(t)\,dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ est majorée (4.10).

Donc : Si $\int_1^\infty f(t)\,dt$ converge, alors $\forall N$ on a

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) \leq \int_1^N f(t)\,dt \leq \int_1^\infty f(t)\,dt,$$ donc

la suite des sommes partielles de $\sum_{n\geq 2} f(n)$ est majorée, et $\sum_{n=2}^{\infty} f(n)$ converge. donc $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ aussi.

Réciproquement : si $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge, alors pour tout $x \in [1,\infty[$, on a

$$\int_1^x f(t)\,dt \leq \int_1^{[x+1]} f(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^{[x]} f(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

donc $x \mapsto \int_1^x f(t)\,dt$ est majorée et $\int_1^\infty f(t)\,dt$ converge. #.

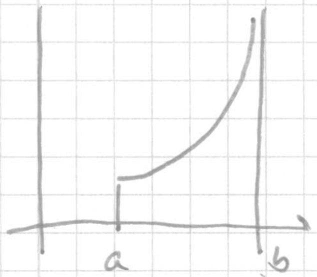
Comme corollaire, on obtient de l'exemple 4.5 une preuve de 2.23 :

<u>4.18 Corollaire</u> : La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$, $a>0$, converge si et seulement si $a > 1$.

<u>preuve</u> : par 4.5, $\int_1^\infty \frac{1}{t^a}$ converge si et seulement si $a > 1$. On applique 4.17. #

<u>4.19 Exemple</u> : Soit $a<b<\infty$, et $f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, et dans ce cas $\int_a^b f(t)\,dt = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$



<u>preuve</u> : Si $\alpha \neq 1$,

$$\int_a^x f(t)\,dt = \left[-\frac{(b-t)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_a^x$$

donc $$\lim_{x\to b} \int_a^x f(t)\,dt = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Si $\alpha = 1$, $\int_a^x f(t)\,dt = [-\log(b-t)]_a^x$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} \int_a^x f(t)\,dt = \infty$. #

<u>4.20 Proposition</u> : Soient $a < b < \infty$, $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ continue. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ avec

$$\lim_{\substack{x \to b \\ <}} (b-x)^\alpha f(x) = \ell \neq 0, \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

Alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ converge ssi $\alpha < 1$.

<u>preuve</u> : On suppose $\ell > 0$ (sinon, prendre $-f$).
Posons $g : [a, b[\to \mathbb{R}$, $g(x) = 1/(b-x)^\alpha$.
Alors $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ pour tous $x \in [a, b[$, et par hypothèse $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)/g(x) = \ell > 0$.
On conclut : $\int_a^b f(t)\,dt$ converge $\overset{4.14}{\Longleftrightarrow}$ $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}\,dt$ converge $\underset{4.13}{\Longleftrightarrow}$ $\alpha < 1$. #

<u>4.21 Remarque</u> : Soit $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ continue, telle que l'on ait : (a) $\int_a^\infty f(t)\,dt$ converge

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Alors on a nécessairement $\ell = 0$.

preuve : On raisonne par l'absurde : Supposons $\ell \neq 0$.
On peut supposer $\ell > 0$ (sinon : considérer $-f$).
Il existe donc $c \in [a, \infty[$ avec

$$x \geq c \implies 0 < \ell/2 \leq f(x).$$

Or $\int_c^\infty \ell/2\,dt$ diverge, donc par comparaison, $\int_c^\infty f(t)\,dt$ diverge aussi. On en déduit que $\int_a^\infty f(t)\,dt$ diverge.

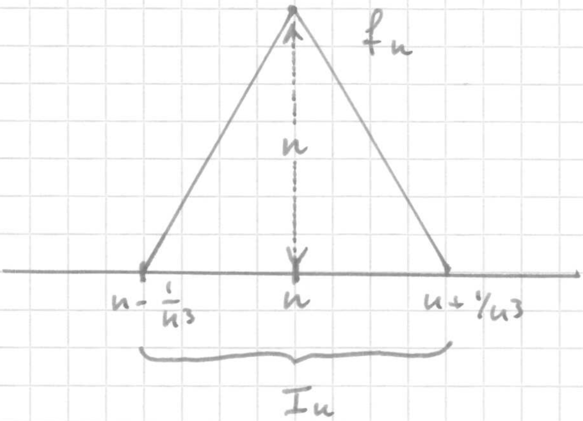
<u>4.22 Exemple</u> : Si $f : [a, \infty[$ est continue et si $\int_a^\infty f(t)\,dt$ est convergente, cela n'implique

pas que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe, ni que f est bornée.

Un exemple :

Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, posons $I_n = [n + \frac{1}{n^3}, n - \frac{1}{n^3}] \subset \mathbb{R}$.

On definit $f_n : I_n \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n^4 (t - (n - \frac{1}{n^3})) & \text{si } t \leq n \\ -n^4 (t - (n + \frac{1}{n^3})) & \text{si } t \geq n. \end{cases}$



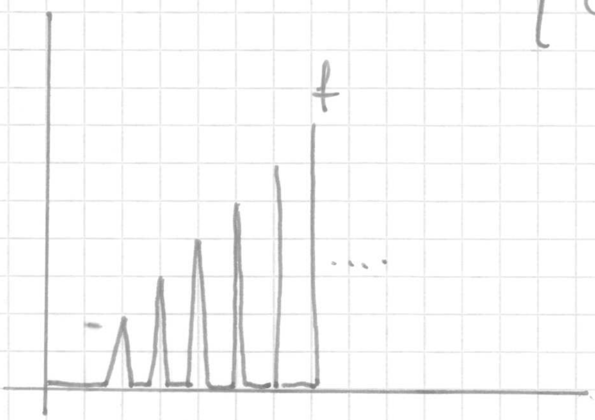
Le graphe de f_n et l'axe $y=0$ délimitent un triangle d'aire

$$\frac{1}{2} \left(n \cdot 2/n^3\right) = \frac{1}{n^2}.$$

On a $\displaystyle\int_{n-\frac{1}{n^3}}^{n+1/n^3} f_n(t)\, dt = \frac{1}{n^2}.$

Definissons $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in I_n,\ n \geq 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



On remarque :

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ n'existe pas, et

f n'est pas bornée, car

$f(n) = n \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

Soit $x \in [0, \infty[$; Il existe $k \in \mathbb{N}$ avec

$k - 1/2 < x \leq k + 1/2$. Alors, f étant non-négative,

$$\int_0^x f(t)\, dt \leq \int_0^{k+1/2} f(t)\, dt = \sum_{n=2}^{k} \int_{I_n} f_n(t)\, dt =$$

$$= \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \in \mathbb{R} \quad \text{(et indépendant de } x\text{).}$$

Donc $x \mapsto \int_0^x f(t)\, dt$ est croissante et majorée, donc $\int_0^\infty f(t)\, dt$ converge !