V EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

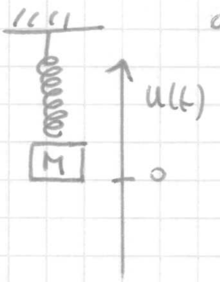
Les équations différentielles sont des équations dont "l'inconnue" est une fonction, qui apparait dans l'équation avec certaines de ses dérivées. Elles sont souvent utilisées aussi en physique, biologie, etc.

5.1 Exemples: (1) Population $u(t)$ (en fonction du temps t). En l'absence de prédateurs ou autres limitations, la croissance est proportionnelle à la population:

$$u'(t) = k \cdot u(t) \quad \text{pour une constante } k \in \mathbb{R}.$$

Condition initiale: population $u(t_0)$ au temps t_0.

(2) Système ressort-masse: dans le cas idéal (pas de frottements, gravité, ...) la force est proportionnelle à la position $u(t)$ par rapport au point d'équilibre $u(t_0) = 0$:



$$u''(t) = -\omega\, u(t) \qquad \omega \in \mathbb{R},\ \omega > 0.$$

Le frottement est (en première approx) proportionnel à la vitesse; si on en tient compte, l'équation devient

$$u''(t) = -c\, u'(t) - \omega\, u(t) \quad , \quad \omega, c \in \mathbb{R},\ \omega, c > 0.$$

On distingue les résultats théoriques (sur l'existence, l'unicité, le comportement des solutions) et l'étude pratique (calcul de solutions par une formule explicite, ou par approximations successives). Nous allons étudier plusieurs types d'équations différentielles parmi celles qu'on peut résoudre en général explicitement (par intégration).

5.2 Terminologie: on appelle ordre d'une équation différentielle en $u(t)$ le $\max\{ m \in \mathbb{N} \mid u^{(m)} \text{ apparait dans l'équation} \}$, où $u^{(m)}$ désigne la dérivée m-ième de u.

<u>5.3 Définition</u> : Soient $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ des intervalles ouverts, $f : I_1 \to \mathbb{R}$ et $g : I_2 \to \mathbb{R}$ continues.
Une équation différentielle de la forme

$$f(u(t)) \cdot u'(t) = g(t) \qquad (*)$$

est appelée <u>équation différentielle à variables séparées</u>.
Une fonction $v : J \to I_1$ continument différentiable sur un intervalle ouvert $J \subset I_2$ est dite <u>solution</u> de $(*)$ si $f(v(t)) \cdot v'(t) = g(t)$ pour tout $t \in J$.

<u>5.4 Théorème (Existence et unicité locale)</u>. Dans la situation de 5.3, supposons que f ne s'<u>annule pas</u> sur I_1.
Alors, pour tout $x_0 \in I_1$ et $t_0 \in I_2$, il existe une solution $v : J \to I_1$ de $(*)$ avec $t_0 \in J$, et vérifiant la condition initiale $v(t_0) = x_0$. On a de plus la condition suivante d'unicité : si $w : J' \to I_1$ est une autre solution avec $t_0 \in J'$ et $w(t_0) = x_0$, alors
$v(t) = w(t)$ pour tout $t \in J \cap J'$.
(ceci nous permet de définir une solution <u>maximale</u> $v : \tilde{J} \to I_1$ de $(*)$ avec $v(t_0) = x_0$, où $\tilde{J}$ est la réunion de tous les intervalles $J' \ni t_0$ sur lesquels une solution avec $t_0 \mapsto x_0$ existe).

<u>Idée de démonstration</u> : (a) existence d'une solution : il suffit d'intégrer. On pose

$$F : I_1 \to \mathrm{Im}(F), \quad x \mapsto F(x) = \int_{x_0}^{x} f(s)\, ds$$

Comme $f = F'$ ne s'annule pas sur I_1, F est monotone sur I_1, ce qui, par continuité, implique qu'elle est une <u>bijection</u> $I_1 \to \mathrm{Im}(F)$ et que $\mathrm{Im}(F)$ est un intervalle ouvert (contenant $F(x_0) = 0$). Soit $\varepsilon > 0$ avec $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \mathrm{Im}(F)$.

On considère ensuite $G : I_2 \to \mathbb{R}$, $G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds$.
Alors G est continue, et il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $t \in J =]t_0-\delta, t_0+\delta[$, on ait $G(t) \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.
Alors, par la règle de dérivation d'une fonction composée on en déduit : $v : J \to I_1$, $v(t) = F^{-1}(G(t))$,
où $F^{-1} :]-\varepsilon, \varepsilon[\to I_1$ est l'inverse de $F : F^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[) \to]-\varepsilon,\varepsilon[$,
est une solution de $(*)$ avec $v(t_0) = x_0$. En effet,

$$F(v(t)) = G(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds,$$

et en dérivant par rapport à t, on trouve $f(v(t))\cdot v'(t) = g(t)$.
De plus $F(x_0) = 0$, donc $v(t_0) = F^{-1}(G(t_0)) = F^{-1}(0) = x_0$.

(b) Unicité locale : si $v : J \to I_1$ et $w : J' \to I_1$ sont deux telles solutions, on trouve

$$F(v(t)) = \int_{v(t_0)}^{v(t)} f(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(v(s))\cdot v'(s)\,ds =$$

$$= \int_{t_0}^{t} g(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} f(w(s))\,w'(s)\,ds = F(w(t))$$

pour tout $t \in J \cap J'$, donc $v(t) = w(t)$ pour tout $t \in J \cap J'$.

#

5.5 Remarque : La preuve nécessite $f(t) \neq 0$ $\forall\, t \in I_1$.
Sinon, le résultat peut être faux : si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = 1$ pour tous t, alors l'équation devient $u(t)\cdot u'(t) = 1$, et n'a aucune solution v avec $v(0) = 0$.

5.6 Exemple : Soit $g : I_2 \to \mathbb{R}$ continue, ($I_2 \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert) et $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Trouver la solution maximale de $\dfrac{u'(t)}{u^n(t)} = g(t)$ avec $u(t_0) = x_0 > 0$.
Ici, $f :]0,\infty[= I_1 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ ne s'annule pas.
$F :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} \dfrac{1}{s^n}\,ds = \dfrac{1}{1-n}\left(x^{-n+1} - x_0^{-n+1}\right)$.

Alors, si $v : J \to I_1$ est solution avec $v(t_0) = x_0$,

$$F(v(t)) = \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds, \quad \text{donc}$$

$$v(t)^{1-n} = (1-n)\int_{t_0}^{t} g(s)\, ds + x_0^{1-n}$$

Or $v(t) > 0 \quad \forall t \in J$, donc

$$v(t) = x_0 \cdot \left(1 + (1-n)\, x_0^{n-1} \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds \right)^{1/1-n}$$

L'intervalle de définition de v est l'intervalle maximal J avec $t_0 \in J \subset I_2$ tel que

$$1 + (1-n)\, x_0^{n-1} \int_{t_0}^{t} g(s)\, ds \neq 0 \quad \forall t \in J.$$

<u>5.7 Exemple</u> (équation de Bernoulli) : $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Une équation de la forme

$$u'(t) + a(t)\, u(t) = b(t) \cdot u^n(t) \qquad (**)$$

est appelée une <u>équation de Bernoulli</u>.

Supposons que $t_0 \in I$, et que $v : J \to I$ soit une solution de $(**)$ avec $v(t_0) = x_0 \neq 0$, et que $v(t)$ ne s'annule pas sur J.

On pose $c(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right)$ et on pose

$\tilde{v}(t) := \dfrac{v(t)}{c(t)}$, donc $v(t) = \tilde{v}(t) \cdot c(t)$. En substituant dans $(**)$, on obtient

$$\tilde{v}'(t) \cdot c(t) = b(t) \cdot c^n(t) \cdot \tilde{v}^n(t)$$

donc $$\frac{\tilde{v}'(t)}{\tilde{v}^n(t)} = b(t) \cdot c^{n-1}(t) =: g(t), \quad \tilde{v}(t_0) = x_0.$$

C'est une équation à variables séparées du type de l'exemple 5.6, d'où on déduit que

$$\tilde{v}(t) = x_0 \left(1 + (1-n)\, x_0^{n-1} \int_{t_0}^{t} b(s) \cdot c^{n-1}(s)\, ds\right)^{1/1-n}, \text{ donc}$$

$$v(t) = x_0\, c(t) \left(1 + (1-n)\, x_0^{n-1} \int_{t_0}^{t} b(s)\, c^{n-1}(s)\, ds\right)^{1/1-n},$$

donnant la solution de (**) avec $v(t_0) = x_0$.

<u>5.8 Exemple d'équation de Bernoulli :</u> $u'(t) + 2t\,u(t) = e^{t^2} u^2(t)$ avec $u(0) = 2$.

Ici $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto 2t$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \exp(t^2) = e^{t^2}$, $n = 2$, $t_0 = 0$ et $x_0 = 2$.

$$c(t) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t} 2s\, ds\right) = \exp(-t^2) \quad \Rightarrow$$

$$v(t) = 2\, e^{-t^2} \left(1 - 2\int_0^t (e^{s^2} \cdot e^{-s^2})\, ds\right)^{-1} =$$

$$= 2e^{-t^2} (1 - 2t)^{-1}, \quad \text{et } J =]-\infty, \tfrac{1}{2}[\,.$$

Bien sûr, en général, on aura pas de formule pour l'expression $\int_{t_0}^{t} b(s)\, c^{n-1}(s)\, ds$.

Maintenant, un type d'équation déjà rencontré en L1 :

<u>5.9 Définition</u> : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert $\neq \emptyset$, $a, b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On appelle <u>équation différentielle linéaire du premier ordre</u> une équation de la forme

$$u'(t) = a(t)\, u(t) + b(t). \qquad (☆)$$

Lorsque $b(t) = 0$ pour tout $t \in I$, on dit que l'équation est <u>homogène</u> ; L'équation homogène

$$u'(t) = a(t)\, u(t) \qquad (H☆)$$

est appelée <u>équation homogène associée</u> (à l'équation ☆).

Une fonction continûment différentiable $v : I \to \mathbb{R}$ est dite <u>solution de</u> l'équation (☆) (resp. H☆) si pour tout $t \in I$, on a $v'(t) = a(t)\, v(t) + b(t)$ (resp. $v'(t) = a(t)\, v(t)$).

5.10 <u>Théorème</u> : on considère l'éq. différentielle linéaire

$$u'(t) = a(t)\, u(t) + b(t) \qquad (\star)$$

définie en 5.9. Alors :

(i) Il existe une solution $v_0 : I \to \mathbb{R}$ de l'éq. $(\star)$.

(ii) Soit $t_0 \in I$. Alors la fonction

$$\omega : I \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \omega(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right)$$

est une solution de l'éq. homogène

$$u'(t) = a(t)\, u(t), \qquad (H\star)$$

et toute solution de $(H\star)$ est de la forme $c\cdot\omega$ pour $c \in \mathbb{R}$.

(iii) Toute solution $v : I \to \mathbb{R}$ de l'éq. $(\star)$ est de la forme $v(t) = v_0(t) + c\cdot\omega(t)$ avec $c \in \mathbb{R}$.

<u>preuve</u> : (ii) il est clair que ω est une solution de $(H\star)$.
Supposons que $f : I \to \mathbb{R}$ soit une solution de $(H\star)$.
On considère la fonction $g : I \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)ds\right)$.
Alors, pour tout $t \in I$ on a

$$g'(t) = f'(t)\cdot\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right) - f(t)\,a(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right)$$
$$= 0 \quad \text{car } f'(t) = a(t) f(t).$$

Donc g est constante : il existe $c \in \mathbb{R}$ avec $g(t) = c$ pour tout t, donc $f(t) = c\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right) = c\,\omega(t)$ pour tout $t \in I$.

(i) Supposons que $c : I \to \mathbb{R}$ soit une fonction continûment différentiable, et soit $v_0 : I \to \mathbb{R}$ donnée par $v_0(t) = c(t)\cdot\omega(t)$.
Pour que v_0 soit solution de $(\star)$, il suffit que :

$v_0'(t) = a(t)\, v_0(t) + b(t)$, donc

$c'(t)\cdot\omega(t) + c(t)\cdot a(t)\cdot\omega(t) = a(t)\cdot c(t)\cdot\omega(t) + b(t)$

donc $c'(t)\,\omega(t) = b(t)$, ou, puisque $\omega(t) \neq 0\ \forall t \in I$,

$c'(t) = b(t)/\omega(t)$ pour tout $t \in I$.

Ainsi, en prenant par exemple $c : I \to \mathbb{R}$, $c(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{\omega(s)} ds$, on obtient la solution $v_0 : I \to \mathbb{R}$,

$$v_0(t) = \left(\int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{\omega(s)} ds \right) \cdot \omega(t) \quad \text{pour tout } t \in I.$$

(iii) Supposons que $v : I \to \mathbb{R}$ soit une solution de l'équation (✮). Soit v_0 la solution trouvée en (ii). Alors $f : I \to \mathbb{R}$, $f(t) = v(t) - v_0(t)$ est une solution de (H ✮), donc, par (i), il existe $c \in \mathbb{R}$ avec $f(t) = c \cdot \omega(t)$ pour tout $t \in I$, autrement dit $v(t) = v_0(t) + c\omega(t)$ pour tout $t \in I$. #

5.11 Remarque (principe de variation de la constante):

Dans la preuve ci-dessus, une solution particulière $v_0 : I \to \mathbb{R}$ de (✮) est trouvée en prenant la solution générale $t \mapsto c \cdot \omega(t)$ de (H ✮), et en faisant ensuite "varier la constante c", c'est-à-dire en la remplaçant par une fonction $t \mapsto c(t)$;

En pratique, pour résoudre l'équation

(✮) $$u'(t) = a(t) \cdot u(t) + b(t), \quad \text{il faut}$$

(1°) Trouver une primitive $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)\, ds$

$\Rightarrow$ on a les solutions $t \mapsto c \cdot \omega(t)$ de l'éq. homogène

$$u'(t) = a(t) \cdot u(t),$$

avec $\omega(t) = \exp(A(t))$.

(2°) Trouver une fonction $c : I \to \mathbb{R}$ qui satisfasse à l'équation

$$c'(t) \cdot \omega(t) = b(t) \quad \text{pour tout } t \in I$$

(3°) Une solution particulière de (✮) est donnée par

$$v_0 : I \to \mathbb{R}, \quad v_0(t) = c(t) \cdot \omega(t).$$

La solution générale de (✮) est $v : I \to \mathbb{R}$, $v(t) = v_0(t) + c\,\omega(t)$ pour $c \in \mathbb{R}$.

5.12 Remarques : (i) On remarque que l'ensemble des solutions $S_0 = \{ v \in C^1(I) \mid v \text{ solution de } (H\star) \}$ est un $\mathbb{R}$-sous-esp. vectoriel de $C^1(I)$ de dimension 1 : $S_0 = \mathrm{Vect}\{w\}$. De plus, l'application $S_0 \to \mathbb{R}$, $v \mapsto v(t_0)$ pour un $t_0 \in I$ fixé est un isomorphisme. Similairement, l'ensemble $S = \{ v \in C^1(I) \mid v \text{ solution de } (\star) \}$ est un espace affine de dimension 1.

Cette remarque motive le terme "équation linéaire".

(ii) Superposition des solutions : Si $a, b_1, b_2 : I \to \mathbb{R}$ sont cont. différentiables, et si $v_0, v_0' : I \to \mathbb{R}$ sont des solutions part. de

$$u'(t) = a(t)\,u(t) + b_1(t) \quad \text{et} \quad u'(t) = a(t)\,u(t) + b_2(t)$$

(respectivement), alors $v_0 + v_0' : I \to \mathbb{R}$ est une sol. part. de l'équation $u'(t) = a(t)\,u(t) + b_1(t) + b_2(t)$.

5.13 Exemple : Résoudre l'équation $u'(t) = \frac{2}{t}\,u(t) + 1$ $(*)$ et trouver la solution v avec $v(1) = 0$.

On procède comme dans la remarque 5.11. Ici $I =]0,\infty[$ ou $]-\infty,0[$.

On traite le cas $I =]0,\infty[$, qui contient $t_0 = 1$

(i) $a : I \to \mathbb{R}$, $a(t) = \frac{2}{t}$.

$$A : I \to \mathbb{R}, \quad A(t) = \int_1^t \frac{2}{t}\,dt = 2\,\mathrm{Log}(t) \qquad (t_0 = 1)$$

Donc $w(t) = \exp(2\,\mathrm{Log}(t)) = \exp(\mathrm{Log}(t))^2 = t^2$ est une solution particulière de l'éq. homogène.

(ii) On cherche $c : I \to \mathbb{R}$ avec

$$c'(t) \cdot t^2 = 1, \quad \text{donc} \quad c'(t) = \frac{1}{t^2} = t^{-2}$$

On peut prendre $c(t) = -1/t$.

(iii) On trouve : $v_0(t) = c(t) \cdot w(t) = -t$ est une sol. part. de $(*)$, et la solution générale est

$$v : I \to \mathbb{R}, \quad v(t) = c \cdot t^2 - t, \quad c \in \mathbb{R}.$$

La solution qui s'annule en 1 est $v(t) = t^2 - t$.

Nous en venons au cas linéaire d'ordre 2 (le plus communément utilisé en physique).

<u>5.14 Définition</u> : Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert $\neq \emptyset$ et $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ continues. On appelle <u>équation différentielle linéaire du second ordre</u> une équation de la forme

$$u''(t) = a(t)\, u'(t) + b(t)\, u(t) + c(t) \qquad (\text{✡})$$

Elle est dite <u>homogène</u> si $c(t) = 0$ pour tout $t \in I$.
L'équation

$$u''(t) = a(t) u'(t) + b(t)\, u(t) \qquad (H\,\text{✡})$$

est appelée <u>équation homogène associée</u> à l'équation (✡).
Une fonction $v \in C^2(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f \text{ est deux fois continûment différentiable} \}$ est appelée une <u>solution</u> de (✡) (resp. de (H✡)) si pour tout $t \in I$, on a

$$v''(t) = a(t)\, v'(t) + b(t)\, v(t) + c(t) \quad \left(\text{resp. } v''(t) = a(t)\, v'(t) + b(t)\, v(t)\right).$$

Contrairement au cas d'ordre un, on n'a dans ce cas pas de résolution explicite en général. Par contre on a un résultat analogue :

<u>5.15 Théorème</u> (Cauchy - Lipschitz). On considère l'éq. diff. lin. du second ordre $u''(t) = a(t) \cdot u'(t) + b(t) \cdot u(t) + c(t)$ (✡) définie en 5.14. Soit $S_0 = \{ v \in C^2(I) \mid v \text{ est sol. de } (H\text{✡}) \}$ l'ensemble des solutions de l'éq. homogène associée.

(i) S_0 est un sous-espace-vectoriel de $C^2(I)$ de dim. 2.
De plus, pour tout $t_0 \in I$, l'application

$$S_0 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad v \longmapsto (v(t_0), v'(t_0))$$

est un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire.

(ii) Il existe une solution $v_0 \in C^2(I)$ de l'éq. (✡).
De plus, toute solution de (✡) est de la forme

$$v = v_0 + w \quad \text{pour} \quad w \in S_0.$$

preuve : admis. Notons qu'il est facile de vérifier que S_0 est bien un sous-espace de $C^2(I)$.

5.16 Remarques : (a) Donc, pour déterminer S_0, il "suffit" de trouver deux solutions w_1 et w_2 de $(H\star)$ qui soient linéairement indépendantes (dans $C^2(I)$) [w_1 et w_2 sont dites linéairement indépendantes si la relation $\lambda w_1(t) + \mu w_2(t) = 0 \quad \forall t \in I$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, implique $\lambda = \mu = 0$]. Si $w_1, w_2 \in S_0$ sont linéairement indépendantes, alors toute solution $w \in S_0$ de $(H\star)$ est de la forme $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, et toute solution v de $(\star)$ est de la forme

$$v = v_0 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$$

pour v_0 solution particulière de $(\star)$, et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Superposition des solutions : Si v_i est une solution de l'équation

$$u''(t) = a(t)\,u'(t) + b(t)\,u(t) + c_i(t), \quad i = 1, 2,$$

alors $v_1 + v_2$ est une solution de l'équation $u''(t) = a(t)\,u'(t) + b(t)\,u(t) + c_1(t) + c_2(t)$.

5.17 Lemme + Définition : Soient $w_1, w_2 \in S_0$ deux solutions de $(H\star)$. Alors w_1 et w_2 sont linéairement indépendantes si et seulement si la fonction

$$W[w_1, w_2] : I \to \mathbb{R}, \quad W[w_1, w_2](t) = \det\begin{pmatrix} w_1(t) & w_2(t) \\ w_1'(t) & w_2'(t) \end{pmatrix}$$

ne s'annule en aucun $t \in I$.

On appelle la fonction $W[w_1, w_2]$ le wronskien de w_1 et w_2.

preuve : S'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ avec $\lambda w_1 + \mu w_2 = 0$, alors, dans $\mathbb{R}^2$ on a $\lambda\,(w_1(t), w_1'(t)) + \mu\,(w_2(t), w_2'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$, donc $W[w_1, w_2](t) = 0 \quad \forall t \in I$.

Inversement, s'il existe $t_0 \in I$ avec $W[\omega_1, \omega_2](t_0) = 0$, on en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, avec $\lambda(\omega_1(t_0), \omega_1'(t_0)) + \mu(\omega_2(t_0), \omega_2'(t_0)) = 0$ dans $\mathbb{R}^2$.
Comme $S_0 \to \mathbb{R}^2$, $\omega \mapsto (\omega(t_0), \omega'(t_0))$ est un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire, on en déduit $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 = 0$ dans S_0. #

5.18 Remarque (Recherche d'une deuxième solution de (H✡)).
Il n'existe pas de formule pour les solutions de (✡) et (H✡), contrairement au cas d'ordre 1. Par contre, si l'on connaît une solution $\omega_1 \in S_0$ avec $\omega_1(t) \neq 0$ $\forall t \in I$, on peut trouver une 2ème solution $\omega_2 \in S_0$ liné. indépendante de ω_1 en variant la constante : on cherche une solution $\omega_2 : I \to \mathbb{R}$ de la forme $\omega_2(t) = \lambda(t) \cdot \omega_1(t)$, $(\lambda : I \to \mathbb{R}) \in C^2(I)$. Alors

$$\omega_2'(t) = \lambda'(t)\,\omega_1(t) + \lambda(t)\,\omega_1'(t)$$
$$\omega_2''(t) = \lambda''(t)\,\omega_1(t) + 2\lambda'(t)\,\omega_1'(t) + \omega_1''(t)$$

En substituant ces valeurs dans l'éq $\omega_2''(t) = a(t)\,\omega_2'(t) + b(t)\,\omega_2(t)$ et en utilisant $\omega_1'' = a \cdot \omega_1' + b\,\omega_1$, on obtient

$$\lambda''(t) \cdot \omega_1(t) = (a(t)\omega_1(t) - 2\omega_1'(t))\,\lambda'(t).$$

Or on a supposé $\omega_1(t) \neq 0$ $\forall t \in I$, donc

$$\lambda''(t) = f(t) \cdot \lambda'(t) \quad \text{avec } f(t) = \frac{a(t)\omega_1(t) - 2\omega_1'(t)}{\omega_1(t)}$$

$= a(t) - 2\frac{\omega_1'(t)}{\omega_1(t)}$. Par 5.10 (ii) on en déduit : $\exists\, t_0 \in I$,

$$\lambda'(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t f(s)\,ds\right) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,ds - 2\,\mathrm{Log}(\omega_1(t)) + 2\,\mathrm{Log}(\omega_1(t_0))\right) = \alpha\,\frac{\exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\,ds\right)}{\omega_1^2(t)}, \quad \alpha = \omega_1(t_0)^2 \neq 0.$$

Donc $\lambda(t) = \alpha \displaystyle\int_{t_0}^t \frac{\exp\left(\int_{t_0}^s a(r)\,dr\right)}{\omega_1^2(s)}\,ds + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Comme l'expression dans l'intégrale est non-nulle, $\lambda(t)$ n'est pas constante. On peut prendre $\alpha = 1$, $\beta = 0$, et on obtient :

Les fonctions $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t) = \lambda(t)\cdot\omega_1(t)$, où

$$\lambda_1(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\exp\left(\int_{t_0}^{s} a(r)\,dr\right)}{\omega_1^2(s)}\,ds\,,$$ sont deux solutions

linéairement indépendantes de (H ✡).

__5.19 Remarque (Recherche d'une solution de (✡)):__ Si l'on connaît deux solutions lin. indép. ω_1 et ω_2 de (H ✡), on peut trouver une solution de (✡) en variant les deux constantes : On suppose que la solution de (✡) est de la forme

$$v(t) = \lambda(t)\,\omega_1(t) + \mu(t)\,\omega_2(t)$$

En substituant cette valeur de $v(t)$ dans (✡), et en utilisant que ω_1 et $\omega_2 \in S_0$, on obtient l'équation

$$\lambda''\omega_1 + 2\lambda'\omega_1' + \mu''\omega_2 + 2\mu'\omega_1' = a(\lambda'\omega_1 + \mu'\omega_2) + c\,.$$

Pour simplifier, on peut supposer $\lambda'\omega_1 + \mu'\omega_2 = 0$;
le terme de droit se réduit à c. De plus, on aura aussi

$$0 = (\lambda'\omega_1 + \mu'\omega_2)' = \lambda''\omega_1 + \lambda'\omega_1' + \mu''\omega_2 + \mu'\omega'\,,$$ donc

le terme de gauche se réduit à $\lambda'\omega_1' + \mu'\omega_2'$.

On a montré : Si $\lambda', \mu' : I \to \mathbb{R}$ sont des solutions du système

$$(*)\quad \begin{cases} \lambda'\omega_1 + \mu'\omega_2 = 0 \\ \lambda'\omega_1' + \mu'\omega_2' = c \end{cases}$$

alors v est une solution de (✡).

Or ce système est résoluble : c'est $\begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1' & \omega_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$

avec $\det\begin{pmatrix} \omega_1(t) & \omega_2(t) \\ \omega_1'(t) & \omega_2'(t) \end{pmatrix} = W[\omega_1,\omega_2](t) \neq 0$

$\forall t \in I$, puisque ω_1 et ω_2 sont lin. indép dans S_0.

Ainsi $$\begin{pmatrix} \lambda' \\ \mu' \end{pmatrix} = \frac{1}{W[\omega_1,\omega_2]}\begin{pmatrix} \omega_2' & -\omega_2 \\ -\omega_1' & \omega_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} -\omega_2 c \\ \omega_1 c \end{pmatrix}$$

En prenant $\lambda(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{-\omega_2(s)\,c(s)}{W[\omega_1,\omega_2](s)}\,ds$ et

et $\mu(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{\omega_1(s)\,c(s)}{W[\omega_1,\omega_2](s)}\,ds$, on a trouvé une sol. particulière de (✡) !

#

Nous considérons maintenant le cas où $a(t)$, $b(t)$ dans $(H\star)$ sont des fonctions constantes : c'est le cas linéaire du $2^{ème}$ ordre à coefficients constants. Par commodité, nous passons $a\,u'(t) + b\,u(t)$ de l'autre côté de $=$. Tout ce que nous avons vu reste valable ; mais, dans ce cas, nous avons des formules explicites dans le cas homogène :

5.20 Proposition (cas lin. homog. du $2^{ème}$ ordre à coef. constants).
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, et considérons l'équation homogène

$$u''(t) + a\,u'(t) + b\,u(t) = 0 \qquad (H\star)$$

Soient r_1 et $r_2 \in \mathbb{C}$ les racines du polynôme à coef. réels

$$P(x) = x^2 + ax + b.$$

On distingue trois cas :

(i) $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ et $r_1 \neq r_2$. Alors $\omega_1, \omega_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec

$$\omega_1(t) = \exp(r_1 t) \quad \text{et} \quad \omega_2(t) = \exp(r_2 t)$$

sont deux sol. lin. indép. de $(H\star)$. $\left(r_1, r_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4b}}{2}\right)$

(ii) $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$. Alors $\omega_1, \omega_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec

$$\omega_1(t) = \exp(r_1 t) \quad \text{et} \quad \omega_2(t) = t\exp(r_2 t) \qquad \left(r_1 = -\frac{a}{2}\right)$$

sont deux sol. lin. indép. de $(H\star)$

(iii) $r_1 = \overline{r_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; Soit $\alpha = \mathrm{Re}(r_1)$, $\beta = |\mathrm{Im}(r_1)|$.
Alors $\omega_1, \omega_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec

$$\omega_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t) \quad \text{et} \quad \omega_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

sont deux sol. lin. indép. de $(H\star)$ $\left(\alpha = -\frac{a}{2},\ \beta = \sqrt{4b-a^2}\right)$

preuve : Si $v(t) = e^{rt}$, en substituant dans $(H\star)$ on obtient $e^{rt}(r^2 + ar + b)$; donc e^{rt} est une solution si $r^2 + ar + b = 0$, donc si r est racine de $X^2 + aX + b$.
On en déduit (i). Dans le cas (iii), on a les solutions complexes $e^{r_1 t}$ et $e^{\overline{r_1} t}$, dont les parties réelles et imaginaires sont des solutions réelles : à signe près, ce sont les ω_1 et ω_2 donnés (Rappel : $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$).

(iii) Si r est une racine double de $P(x) = x^2 + ax + b$, alors on a aussi $0 = P'(r) = 2r + a$.
En substituant $t e^{rt}$ dans $(H*)$, on obtient
$$e^{rt}\left((r^2 + ar + b)t + (2r + a) \right) = e^{rt}(0 + 0) = 0.$$
#

5.21 Remarques : (a) Il est plus utile de se souvenir de la preuve de 5.20 que de son énoncé !
(b) Puisque on a ici deux solutions lin. indép explicites, si $c : I \to \mathbb{R}$ est continue, $a, b \in \mathbb{R}$, alors 5.19 nous fournit une solution explicite v_0 de l'équation
$$u''(t) + a u'(t) + b(t) = c(t).$$
En appliquant la formule donnée en 5.19, on obtient dans les trois cas ci-dessus :
$$(i) \quad v_0(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{c(s) \cdot \left(\exp(r_2(t-s)) - \exp(r_1(t-s)) \right)}{(r_2 - r_1)} ds$$
etc.... Dans la pratique, il suffit de se souvenir du système donné en 5.19, plutôt que de ce genre de formule !

5.22 Exemple : Résoudre l'équation sur $I =]0, \infty[$:
$$u''(t) = -\frac{1}{t} u'(t) + \frac{1}{t^2} u(t) + \mathrm{Log}(t). \qquad (*)$$

Pour appliquer la méthode décrite ci-dessus, il faut trouver une première solution de l'éq. hom $(H*)$: $u''(t) + \frac{1}{t} u'(t) - \frac{1}{t^2} u(t) = 0$
Or $\omega_1(t) = t$ en est une, et elle ne s'annule pas sur I.
On sait que $\omega_2(t)$ est de la forme $\omega_2(t) = \lambda(t) \cdot t$.
En substituant dans $(H*)$ on trouve $\lambda''(t) = -\frac{3}{t} \lambda'$,
donc $\lambda'(t) = \exp\left(\int_1^t -\frac{3}{s} ds \right) = \exp(-3 \,\mathrm{Log}(t)) = \frac{1}{t^3}$,
donc $\lambda(t) = \int_1^t \frac{1}{s^3} ds = \frac{1}{2} - \frac{1}{2t^2}$, donc
$$\lambda(t) \cdot t = \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} = \frac{1}{2}\omega_1 - \frac{1}{2}\frac{1}{t}.$$

Ainsi $\omega_2(t) = \frac{1}{t}$ est aussi une solution.

De plus, ω_1 et ω_2 sont lin. indép.:

$$W[\omega_1, \omega_2] = \det\begin{pmatrix} t & 1/t \\ 1 & -\frac{1}{t^2}\end{pmatrix} = -\frac{2}{t} \neq 0 \quad \forall\, t \in I.$$

Par 5.19, une solution particulière de $(*)$ est de la forme $v_0(t) = \lambda(t)\cdot\omega_1(t) + \mu(t)\,\omega_2(t)$, où

$$\begin{pmatrix}\lambda'(t) \\ \mu'(t)\end{pmatrix} = -\frac{t}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t} \\ -1 & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{Log}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\mathrm{Log}(t) \\ -\frac{t^2}{2}\mathrm{Log}(t)\end{pmatrix},$$

donc
$$v_0(t) = \frac{t}{2}\int_1^t \mathrm{Log}(s)\,ds - \frac{1}{2t}\int_1^t s^2\,\mathrm{Log}(s)\,ds \overset{\text{par parties!}}{=}$$

$$\frac{t}{2}\Big[s\,\mathrm{Log}(s) - s\Big]_1^t - \frac{1}{2t}\Big[\frac{1}{3}s^3\,\mathrm{Log}(s) - \frac{1}{9}s^3\Big]_1^t =$$

$$= \frac{1}{3}t^2\,\mathrm{Log}(t) - \frac{4}{9}t^2 + \underbrace{\frac{t}{2} - \frac{1}{18t}}_{\in S_0}$$

La solution générale est donc

$$v(t) = \frac{1}{3}t^2\,\mathrm{Log}(t) - \frac{4}{9}t^2 + \alpha t + \frac{\beta}{t}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

<u>5.23 Remarque</u> : pour exposer la théorie, nous avons noté $u(t)$ la fonction cherchée, $v(t)$ sa solution générale. Dans les exercices (TD, manuels, etc) on rencontre souvent la notation x au lieu de t, $y = y(x)$ au lieu de $u(t)$ (en référence au graphe d'une solution). Par exemple, l'équation de 5.22 est alors de la forme

$$y'' = -\frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y + \mathrm{Log}(x)$$