VI ESPACES VECTORIELS

Dans ce chapitre, nous révisons les notions d'espace vectoriel, de sous-espace vectoriel, de base, de dimension, d'applications linéaires. Nous désignons par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

6.1 Définition: Un <u>$\mathbb{K}$-espace vectoriel</u> est un ensemble E, muni d'applications

- $E \times E \longrightarrow E$, $(x, y) \longmapsto x \underset{E}{+} y$ (la somme)
- $\mathbb{K} \times E \longrightarrow E$, $(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$ (l'<u>action de $\mathbb{K}$</u> ou la <u>multiplication scalaire</u>)

et satisfaisant aux axiomes suivants ; Pour la somme :

(A 1) $(x \underset{E}{+} y) \underset{E}{+} z = x \underset{E}{+} (y \underset{E}{+} z) \quad \forall\, x, y, z \in E$

(A 2) $x \underset{E}{+} y = y \underset{E}{+} x$

(A 3) Il existe un élément $0_E \in E$ avec
$x \underset{E}{+} 0_E = x \quad (= 0_E \underset{E}{+} x$ par A2$) \quad \forall\, x \in E$
(en particulier E est non-vide. On appelle 0_E l'élément <u>zéro</u> de E).

(A 4) Pour tout $x \in E$, il existe $-x \in E$ avec
$x \underset{E}{+} (-x) = 0_E$.

Pour la multiplication scalaire:

(MS 1) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \mu) \cdot x \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ x \in E$.
(ici $\lambda\mu$ est le produit de λ et μ dans $\mathbb{K}$)

(MS 2) $1 \cdot x = x \quad \forall\, x \in E$
(ici $1 \in \mathbb{K}$)

(MS 3) $(\lambda + \mu) \cdot x = (\lambda \cdot x) \underset{E}{+} (\mu \cdot x) \quad \forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

(MS 4) $\lambda (x \underset{E}{+} y) = (\lambda \cdot x) +_E (\lambda \cdot y) \quad \forall\, x, y \in E$

Les éléments de E sont souvent appelés <u>vecteurs</u>. En général, on écrit $+$ au lieu de $\underset{E}{+}$, 0 au lieu de 0_E, et

λx au lieu de $\lambda \cdot x$.

Donc, lorsque l'on définit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, il faut préciser :

- l'ensemble E
- la somme $E \times E \xrightarrow{+} E$
- l'action $\mathbb{K} \times E \xrightarrow{\cdot} E$

et vérifier les axiomes ci-dessus.

6.2 Exemples (a) le corps $\mathbb{K} = (\mathbb{K}, +, \times)$ est un $\mathbb{K}$--espace vectoriel, avec

$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{+} \mathbb{K}$ (la somme de $\mathbb{K}$ comme corps)

$\mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{K}$ (l'action = le produit de $\mathbb{K}$)

Les axiomes de $\mathbb{K}$-espace vectoriels suivent des axiomes de corps (1.1). (b) $E = \{0_E\}$ (un espace vectoriel nul, noté $E = 0$).

6.3 Remarques : de nombreuses règles de calculs (bien-connues dans $\mathbb{R}^2$) suivent des axiomes, et sont laissées en exercice :

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors

(i) $0_E \in E$ est unique ; $(-x)$ est unique, pour tout $x \in E$.

(ii) Si $x \underset{E}{+} y = x \underset{E}{+} z$, alors $y = z$

(iii) $0 \cdot x = 0_E \quad \forall x \in E$

(iv) $(-1) \cdot x = -x \quad \forall x \in E$

(v) $\lambda x = 0_E \iff \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.

On introduit la notation $x - y = x + (-y)$.

6.4 Définition + Proposition : Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Leur produit cartésien

$$E \times F = \{ (x, y) \mid x \in E,\ y \in F \}$$

est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec

la somme : $(E \times F) \times (E \times F) \xrightarrow{+_{E\times F}} (E \times F)$

$$\big((x, y), (u, v) \big) \longmapsto (x \underset{E}{+} u, \ y \underset{F}{+} v)$$

et l'action $\mathbb{K} \times (E \times F) \longrightarrow E \times F$, $(\lambda, (x,y)) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$ (on dit : somme et action "composante par composante").

La vérification des axiomes est un exercice de routine. Par exemple :

$$(A2) : \quad \left((u,v) \underset{E\times F}{+} (x,y) \right) := \left(u \underset{E}{+} x ,\ v \underset{F}{+} y \right) =$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ A2 \text{ pour } E \text{ et } F.}}{=} \left(x \underset{E}{+} u ,\ y \underset{F}{+} v \right) =: \left((x,y) \underset{E\times F}{+} (u,v) \right)$$

ainsi de suite (avec $0_{E\times F} = (0_E, 0_F)$ et $-(x,y) = (-x,-y)$).

On peut définir aussi le produit cartésien de n $\mathbb{K}$-esp. vect. $E_1, \dots, E_n$:

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in E_i,\ 1 \le i \le n \}$$

avec la somme

$$(E_1 \times \dots \times E_n) \times (E_1 \times \dots \times E_n) \longrightarrow (E_1 \times \dots \times E_n)$$
$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \longmapsto (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

et l'action

$$\mathbb{K} \times (E_1 \times \dots \times E_n) \longrightarrow (E_1 \times \dots \times E_n)$$
$$(\lambda, (x_1, \dots, x_n)) \longmapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

composante par composante. Ici $0 = (0, \dots, 0)$ et $-(x_1, \dots, x_n) = (-x_1, \dots, -x_n)$.

En particulier, en prenant $E_1 = E_2 = \dots = E_n = \mathbb{K}$, on obtient le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K} = \{ (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K} \}$, avec la somme et l'action bien connues (composantes par composantes).

<u>6.5 Proposition et définition :</u> Soit A un ensemble, et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit

$$\mathcal{F}(A, E) = \{ f : A \to E \}$$

l'ensemble de toutes les applications de A dans E.

On définit la somme $\mathcal{F}(A,E) \times \mathcal{F}(A,E) \xrightarrow{+} \mathcal{F}(A,E)$, $(f,g) \mapsto f+g$ où $f+g : A \to E$, $a \mapsto (f+g)(a) = f(a) +_E g(b)$ (somme dans E).

On définit l'action $\mathbb{K} \times \mathcal{F}(A,E) \xrightarrow{\cdot} \mathcal{F}(A,E)$, $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ où $\lambda f : A \to E$, $a \mapsto (\lambda f)(a) = \lambda \cdot (f(a))$ ($\cdot$ dans E).

Alors $\mathcal{F}(A,E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Notons que $0 \in \mathcal{F}(A,E)$ est la fonction $0 : A \to E$, $a \mapsto 0_E$, et si $f \in \mathcal{F}(A,E)$, $-f$ est la fonction $-f : A \to E$, $a \mapsto -f(a)$.

preuve : la vérification est un exercice de routine, chaque axiome pour $\mathcal{F}(A,E)$ découlant de l'axiome correspondant pour E. Par exemple :

(A1) On veut montrer $(f+g)+h = f+(g+h)$ dans $\mathcal{F}(A,E)$. Les deux fonctions sont égales ssi elles la même valeur en $a \in A$ pour chaque $a \in A$, ce qui suit de (A1) pour E :

$$((f+g)+h)(a) = (f+g)(a) +_E h(a) =$$

$$(f(a) +_E g(a)) +_E h(a) \underset{(A1 \text{ pour } E)}{=} f(a) +_E (g(a) +_E h(a))$$

$$= f(a) +_E (g+h)(a) = (f+(g+h))(a). \qquad \#$$

<u>6.6 Exemples</u> : prenons $E = \mathbb{K}$, avec la structure de $\mathbb{K}$-esp. vect. donnée en 6.2. On a les exemples suivants de $\mathbb{K}$-esp. vectoriels :

(a) $\mathcal{F}(\emptyset, \mathbb{K})$ ne possède qu'un élément : c'est l'espace $\{0\}$.

(b) Si $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, et $A = \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$, alors

$$\mathcal{F}(A, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$$
$$f \longmapsto (f(1), \dots, f(n))$$

(c) Si $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 1$, et $B = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, alors

$$\mathcal{F}(B, \mathbb{K}) =: M_{m \times n}(\mathbb{K})$$
$$f \mapsto (f(i,j))_{(i,j) \in B}$$

Ici $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ est l'espace vectoriel des matrices $m \times n$, et on écrit en général f sous forme de tableau à m lignes et n colonnes : $f = \begin{pmatrix} f(1,1) & \cdots & f(1,n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(m,1) & \cdots & f(m,n) \end{pmatrix}$.

(d) $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$: c'est le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des suites dans $\mathbb{K}$.

(e) $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: le $\mathbb{R}$-espace vect. de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Similairement $\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, etc.

<u>6.7 Définition + Proposition :</u> Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Un sous-ensemble $F \subset E$ est appelé un <u>sous-espace (vectoriel)</u> si

(i) $0_E \in F$

(ii) Si $x, y \in F$, alors $x +_E y \in F$

(iii) Si $x \in F$, alors $\lambda x \in F$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Si $F \subset E$ est un sous-espace, alors les restrictions

$F \times F \xrightarrow{+} F$, $(x, y) \mapsto x + y$ (somme dans E)

$\mathbb{K} \times F \xrightarrow{\cdot} F$ $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ (action dans E)

de la somme et de l'action pour E munissent F d'une structure de $\mathbb{K}$-esp. vect (appelée structure <u>induite</u> par celle de E).

<u>preuve</u> : par (i), on a $F \neq \emptyset$. Par (ii) et (iii), les applications $F \times F \xrightarrow{+} E$ et $\mathbb{K} \times F \xrightarrow{\cdot} E$ sont bien à valeurs dans F. Les axiomes suivent alors du fait qu'ils sont vérifiés dans E. Notons que $0_F = 0_E$, et si $x \in F$, alors $-x = (-1) \cdot x \in F$ par (iii).

#

<u>6.8 Exemples</u> : (a) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors $\{0\}$ et E sont des sous-espaces de E.

(b) Si $E = \mathbb{K}^n$, l'ensemble $X \subset \mathbb{K}^n$ des solutions d'un système d'équations linéaires homogène est un sous-espace;

le système est donné par une matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ (m = # d'équations), et $X = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(c) $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ continue} \}$

$\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ dérivable} \}$

$C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est } n\text{-fois continûment dérivable} \}$, où $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$,

sont des exemples de sous-espaces de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ considérés en analyse.

(d) Polynômes (ou fonctions polynômiales) sur $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{P}^{\mathbb{K}}[x] = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \mid \exists m \in \mathbb{N},\ a_0, \dots, a_m \in \mathbb{K} \text{ avec } f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m \ \forall x \in \mathbb{K} \}$$

est un sous-espace du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$.

De même, si $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}[x] = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \mid \exists\ a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K} \text{ avec } f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \ \forall x \in \mathbb{K} \}$$

est l'espace vectoriel (comme sous-espace de $\mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$) des polynômes de degré $\leq n$.

(e) $\{ (u_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \mid \lim_{n\to\infty} u_n = 0 \}$

$\{ (u_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \mid (u_n) \text{ converge} \}$

$\{ (u_n) \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) \mid \sum u_n \text{ converge} \}$

sont des sous-espaces de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ (par les opérations sur les suites ou les séries).

Il existe de nombreuses variantes de ces exemples (et de ceux donnés en 6.6), par exemple en commençant avec $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, etc...

6.9 Déf + Proposition : Soit E un $\mathbb{K}$-esp. vect et $S \subset E$ un sous-ensemble. On dit que $x \in E$ est une **combinaison linéaire** d'éléments de S si il existe $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $x_1, \dots, x_n \in S$ avec

$$x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n \quad \text{dans } E.$$

On dénote $\mathrm{Vect}(S) = \{ x \in E \mid x \text{ est comb. lin. d'éléments de } S\} \subset E$. Par convention, on pose $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$.
Alors $\mathrm{Vect}(S)$ est un sous-espace de E contenant S.
De plus, si F est un autre sous-espace de E contenant S, alors $\mathrm{Vect}(S) \subset F$.

preuve : clair. #

6.10 Remarque Soient E un $\mathbb{K}$-esp. vect et $S \subset E$. Soient $x \in S$, $y \in \mathrm{Vect}(S \setminus \{x\})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ avec $\lambda \neq 0$. Si

$$T = (S \setminus \{x\}) \cup \{\lambda x + \mu y\}$$

alors $\mathrm{Vect}(S) = \mathrm{Vect}(T)$ (il suffit de remarquer $S \subset \mathrm{Vect}(T)$ et $T \subset \mathrm{Vect}(S)$).

6.11. Exemple : dans $\mathbb{K}^3$, $\mathrm{Vect}(\{(1,1,0), (1,-1,0)\}) =$
$= \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3 \mid x_3 = 0 \}$.

6.12. Proposition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace et $\{F_i\}_{i \in I}$ une famille de sous-espaces de E. Alors

$$\bigcap_{i \in I} F_i = \{ x \in E \mid x \in F_i \ \forall i \in I \} \subset E$$

est un sous-espace de E.

preuve : il est clair que $\bigcap F_i$ satisfait à (i), (ii), (iii) de 6.7. #

6.13 Remarque : Si $F_1, F_2 \subset E$ sont des sous-espaces, alors $F_1 \cup F_2 = \{ x \in E \mid x \in F_1 \text{ ou } x \in F_2 \}$ n'est un sous-espace que si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$. On introduit :

6.14 Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace, et $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces de E. On définit la somme de $F_1, \dots, F_n$ par

$$F_1 + \dots + F_n := \mathrm{Vect}(F_1 \cup \dots \cup F_n) \subset E$$

C'est donc le plus petit sous-espace de E qui contienne F_i pour tous les $1 \le i \le n$.

6.15 Définition + Lemme : Soient $V, W \subset E$ deux sous-espaces. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout $x \in V+W$, il exist $v \in V$ et $w \in W$ uniques avec $x = v + w$.

(ii) $V \cap W = \{0\}$

Si ces conditions sont satisfaites, on dit que V et W sont en somme directe, et on écrit $V \oplus W$ au lieu de $V+W$.

preuve : (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $x \in V \cap W$. Alors

$$x = v_1 + w_1 = v_2 + w_2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_1 = x \in V, & w_1 = 0 \in W \\ v_2 = 0 \in V, & w_2 = x \in W \end{cases}$$

par unicité $v_1 = v_2$ donc $x = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $x \in V+W$, $v_1, v_2 \in V$, $w_1, w_2 \in W$ tels que

$$x = v_1 + w_1 = v_2 + w_2 . \quad \text{Alors}$$

$$v_1 - v_2 = w_2 - w_1 \in V \cap W = \{0\}, \text{ donc } v_1 = v_2 \text{ et } w_2 = w_1 .$$

6.16 Remarque Si $V_1, \dots, V_n \subset E$ sont des sous-espaces, on dit qu'ils sont en somme directe, noté $V_1 \oplus \dots \oplus V_n$, si la condition

(•) si $x \in V_1 + \dots + V_n$, il exist $v_i \in V_i$ unique, $\forall\, 1 \le i \le n$, avec $x = v_1 + \dots + v_n$

est vérifiée. (⚠ si $n \geq 3$, cette condition n'est pas équivalente à la condition $V_1 \cap \dots \cap V_n = 0$ en général).

6.17 Définition : Soit V un $\mathbb{K}$-esp. vect, $X \subset V$ un sous-ensemble.

(a) On dit que X engendre V si $V = \mathrm{Vect}(X)$.

(b) On dit que X est libre ou linéairement indépendant

si pour tout sous-ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ (les x_i deux-à-deux distincts), l'unique suite $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ avec $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$ est la suite $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.
Sinon, on dit que X est <u>lié</u> ou <u>linéairement dépendant</u>.
(Par convention, $\emptyset$ est libre).

(c) On dit que X est une <u>base</u> de V si X est libre et engendre V.

<u>6.18 Remarques</u> (a) Si $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset V$ (tous distincts), alors X est libre $\Leftrightarrow$ $\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \text{ dans } V \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i\right]$

(b) Si $X \subset V$ est libre et $Y \subset X$, alors Y est aussi libre.

(c) $X \subset V$ est libre $\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$, $x \notin \mathrm{Vect}(X \setminus \{x\})$

(d) Si $X \subset V$ est libre et si $y \in V \setminus \mathrm{Vect}(X)$, alors $X \cup \{y\} \subset V$ est libre.

<u>6.19 Exemples</u> (a) Dans $\mathbb{K}^n$, on a la base "canonique"
$\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{K}^n$ avec $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{ième place}}{1}, 0, \dots, 0)$.

(b) $\emptyset$ est une base de $\{0\}$.

(c) $\{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ engendre $\mathbb{R}^2$ mais n'est pas libre.

(d) Soit A un ensemble et $V = \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$. Pour tout $a \in A$, posons $\delta_a : A \to \mathbb{K}$, $\delta_a(x) = \begin{cases} 1 & a = x \\ 0 & a \neq x \end{cases}$

Soit $X = \{\delta_a \mid a \in A\} \subset \mathcal{F}(A, \mathbb{K})$.

Alors X est libre : si $\delta_{a_1}, \dots \delta_{a_n} \in X$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ avec $\lambda_1 \delta_{a_1} + \dots + \lambda_n \delta_{a_n} = 0$, alors $\lambda_i = \lambda_1 \delta_{a_1}(a_i) + \dots + \lambda_n \delta_{a_n}(a_i) = 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq n$.

Par contre, X est une base si et seulement si A est fini ; en effet, $\mathrm{Vect}(X) = \{f : A \to \mathbb{K} \mid f \text{ est à support fini}\}$.

Notons : si $A = \{1, \dots, n\}$, alors $\mathcal{F}(A, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^n$ et X est la base canonique donnée en (a).

(e) $C = \{1, x, x^2, x^3, \dots\}$ est une base de $P^{\mathbb{K}}[x]$ (souvent appelé base canonique ou base monomiale).

(f) $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ admet $\{E_{ij} \mid 1\le i\le m,\ 1\le j\le n\}$ comme base, où $(E_{ij})_{ke} = \begin{cases} 1 & (ij) = (ke) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
(c'est la base X de (d) pour $A = \{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\} \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$).

<u>6.20 Théorème (Complétion en une base)</u> : Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $L \subset V$ un sous-ensemble libre, et $S \subset V$ un sous-ensemble qui engendre V.
Alors il existe une base B de V avec $L \subset B \subset L\cup S$.
En particulier, en prenant $L = \emptyset$ et $S = V$, on en déduit : tout espace vectoriel admet une base.

preuve : admis.

<u>6.21 Corollaire</u> Soit V un $\mathbb{K}$-esp. vect, $W \subset V$ un sous-espace. Alors il existe un sous-espace $U \subset V$ avec $W \oplus U = V$.
Un tel U est appelé un <u>supplémentaire</u> de W dans V (⚠ il n'est en général pas unique !).

<u>preuve</u> : Soit $L \subset W$ une base de W. Il existe une base B de V avec $L \subset B$. Soit $K = B \setminus L$. Il suffit de prendre $U = \mathrm{Vect}(K)$.
#

<u>6.22 Proposition + Définition</u> : Un $\mathbb{K}$-esp. vect. V est dit de <u>dimension finie</u> s'il existe un sous-ensemble $S \subset V$ fini qui engendre V. Si V est de dimension finie, toutes les bases de V ont le même nombre fini d'éléments ; ce nombre est appelé la <u>dimension de V</u>, noté $\dim(V)$. (Donc, si V est de dimension finie,
$$\dim(V) = n \iff \exists \text{ une base } B \text{ avec } \mathrm{Card}(B) = n)$$
Sinon, on dit que V est de dimension infinie.

6.23 Remarques : Soit V un $\mathbb{K}$ esp. vect. de dim $n \in \mathbb{N}$.

(a) Si $S \subset V$ est libre, alors $\mathrm{card}(S) \leq n$

(b) Si $S \subset V$ engendre V, alors $\mathrm{card}(S) \geq n$

(c) Si $S \subset V$ est libre et $\mathrm{card}(S) = n$, alors S est une base.

(d) Si $S \subset V$ engendre V et $\mathrm{card}(S) = n$, " " .

(e) Si $W \subset V$ est un sous-espace, $\dim(W) \leq n$,

et $\dim(W) = n \iff W = V$

6.24 Proposition : Soient W_1, W_2 deux sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-esp. vect. V de dimension finie. Alors

(a) Si $B_1 \subset W_1$ et $B_2 \subset W_2$ sont des bases, on a : $W_1 \oplus W_2 \iff B_1 \cup B_2$ est libre dans V.

(b) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$.

En particulier, si $W_1 \cap W_2 = 0$, alors $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ et on obtient $\dim(W_1 \oplus W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$.

6.25 Définition : Soit V un $\mathbb{K}$-esp. vect de dim n, et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base V. On peut associer à tout $x \in V$ une matrice $\{x\}_{\mathcal{B}} \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$, uniquement déterminée par

$$\{x\}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

On appelle $x_1, \dots, x_n$ les <u>composantes</u> ou <u>coordonnées</u> <u>de x dans la base $\mathcal{B}$</u>, et $\{x\}_{\mathcal{B}}$ la matrice des coordonées. (⚠ $\{x\}_{\mathcal{B}}$ dépend du choix de $\mathcal{B}$!).

6.26 Remarque : ne pas confondre $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et les coordonnées de x dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, données par $\{x\}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{K})$.

6.27 Exemple : Soit $\mathcal{B} = \{ e_1 = (1,0),\ e_2 = (0,1) \}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, et soit

$\mathcal{C} = \{ f_1 = (-1,1),\ f_2 = (0,1) \}$; $\mathcal{C}$ est aussi une base de $\mathbb{R}^2$. Si $x = (3,5) \in \mathbb{R}$, alors

$$\{x\}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad x = 3 \cdot e_1 + 5 e_2$$

$$\{x\}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad x = -3 f_1 + 8 f_2$$

6.28 Définition : Soient V, W deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f : V \to W$ une application. On dit que f est <u>$\mathbb{K}$-linéaire</u> (ou <u>linéaire</u>) si pour tous $x, y \in V$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \text{dans } W.$$

6.29. Remarque : donc $f : V \to W$ est linéaire ssi f est compatible avec la structure d'espace vectoriel. 6.28 est équivalent à

- $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in V$
- $f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \forall x \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

On a aussi $f(0) = 0$ et $f(-x) = -f(x)$.

6.30 Définition + Lemme : Soit $f : V \to W$ linéaire on définit :

$\operatorname{Ker}(f) = \{ x \in V \mid f(x) = 0 \} \subset V$ (le noyau)

$\operatorname{Im}(f) = \{ y \in W \mid \exists\, x \in V,\ y = f(x) \} \subset W$ (l'image)

Alors $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont des sous-espaces.

Si V est dimension finie, alors $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ aussi, et dans cas on appelle $\dim \operatorname{Im}(f)$ le <u>rang de f</u> (noté $\operatorname{rg}(f)$).

6.31 Définition + lemme : Soit $f : V \to W$ linéaire.

Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) f est <u>injective</u> (donc $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$)

(ii) $\operatorname{Ker}(f) = 0$

#

6.32 Définition + lemme Soit $f : V \to W$ linéaire. Les conditions suivantes sont équivalentes

(a) f est un isomorphisme : il existe $g : W \to V$ linéaire avec $g \circ f = id_V$, $f \circ g = id_W$.

(b) f est bijective (donc injective et surjective (i.e. $Im(f) = W$). #

6.33 Théorème du Rang : Soit $f : V \to W$ $\mathbb{K}$-linéaire, avec V de dimension finie. Alors

$$\dim(V) = \dim(\ker f) + \overbrace{\dim(Im(f))}^{= rg(f)} .$$ #

6.34 Remarques : conséquences importantes : Si $f : V \to W$ est $\mathbb{K}$-linéaire, et V, W de dimension finie, alors

(a) Si f est un iso, $Im(f) = W$ et $\ker(f) = 0$, donc $\dim W = \dim V$

(b) Si $\dim(W) = \dim(V)$, alors les cond. suiv. sont équivalentes :

(i) f est injective

(ii) f est surjective

(iii) f est un isomorphisme.

6.35 Déf. + lemme : Soient V, W deux $\mathbb{K}$-esp. vect, et soit

$$\mathcal{L}(V,W) = \{ f \in \mathcal{F}(V,W) \mid f \text{ est } \mathbb{K}\text{-linéaire} \} \subset \mathcal{F}(V,W)$$

Alors $\mathcal{L}(V,W)$ est un sous-espace de $\mathcal{F}(V,W)$.

preuve : il est clair que $\mathcal{L}(V,W)$ satisfait à 6.7 (i) + (ii) + (iii). #

6.36 Proposition: Soit V, W des $\mathbb{K}$-espaces et $\mathcal{B} \subset V$ une base. Alors l'application "restriction"

$$r_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{B}, W)$$
$$f \longmapsto f|_{\mathcal{B}}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Preuve : il est clair que $r_{\mathcal{B}}$ est linéaire.

On définit un inverse de r_B par $e_B : \mathcal{F}(B, W) \to \mathcal{L}(V, W)$ de la façon suivante : si $g \in \mathcal{F}(B, W)$, on pose $e_B(g) = f : V \to W$ définie par : si $x \in V$, il existe $n \in \mathbb{N}$, $e_1, \dots, e_n \in B$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \setminus 0$ uniques avec $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$, et on pose

$$f(x) = \lambda_1 g(e_1) + \dots + \lambda_n g(e_n)$$

(Si $x = 0$, alors $n = 0$, et $f(0) =$ somme vide $= 0$).

Il est clair que $r_B \circ e_B = id_{\mathcal{F}(B,W)}$ et $e_B \circ r_B = id_{\mathcal{L}(V,W)}$.

#

<u>6.37 Définition :</u> Soient V, W des $\mathbb{K}$-esp. de dim finie, et $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$, $C = \{f_1, \dots, f_m\} \subset W$ des bases. Soit $f : V \to W$ $\mathbb{K}$-linéaire. Pour tout $1 \leq j \leq n$, considérons

$$\{f(e_j)\}_C =: \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in M_{m \times 1}(\mathbb{K})$$

les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base C. On note

$$\{f\}_C^B = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$$

la matrice dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est $\{f(e_j)\}_C$.

On l'appelle <u>la matrice de f dans les bases $B \subset V$ et $C \subset W$.</u>

<u>6.38 Proposition</u> : reprenons les notations de 6.37. Alors pour tout $x \in V$, on a

$$\{f(x)\}_C = \{f\}_C^B \cdot \{x\}_B \quad \text{dans } M_{m \times 1}(\mathbb{K})$$

(à droite, c'est le produit matriciel de $\{f\}_C^B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ et $\{x\}_B \in M_{n \times 1}(\mathbb{K})$). En d'autres termes, si $\{f\}_C^B = (a_{ij})$, et $\{x\}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\{f(x)\}_C = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$, alors $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$.

<u>preuve</u> : Suit, par définition du produit matriciel(*), du calcul

$f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) =$

$x_1 \sum_{i=1}^{m} a_{i1} f_i + \dots + x_n \sum_{i=1}^{m} a_{in} f_i =$

(*) voir 6.40

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j\right) f_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j\right) f_m$$ qui implique que $\{f(x)\}_C = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix}$. #

<u>6.39 Exemple:</u> $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x+y, 2x-y, 3y)$

Dans les bases canonique $\mathcal{B} = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ et $C = \{f_1 = (1,0,0), f_2 = (0,1,0), f_3 = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$, on

$f(e_1) = f(1,0) = (1,2,0) = 1\cdot f_1 + 2 f_2 + 0\cdot f_3$,

$f(e_2) = f(0,1) = (1,-1,3) = 1\cdot f_1 - 1\cdot f_2 + 3\cdot f_3$, donc

$$\{f(e_1)\}_C = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \text{ et } \{f(e_2)\}_C = \begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}, \Rightarrow \{f\}_C^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -1 \\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Si on remplace la base C par la base

$$C' = \{f_1' = (1,2,0), f_2' = (1,-1,3), f_3' = (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3,$$

on trouve $f(e_1) = f_1'$, $f(e_2) = f_2'$, donc

$$\{f\}_{C'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

<u>6.40 Definition + lemme</u>: rappelons le produit matriciel et ses propriétés:

Soient $l, m, n \in \mathbb{N} \setminus 0$, $A = (a_{ij}) \in M_{l\times m}(\mathbb{K})$, et $B \in (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. On definit le <u>produit</u> $AB \in M_{l\times n}(\mathbb{K})$ de A et B par

$$AB = (t_{ij}) \quad \text{où} \quad t_{ij} = \sum_{t=1}^{m} a_{im} \cdot b_{mj}, \ \forall \begin{cases} 1 \le i \le l \\ 1 \le j \le n \end{cases}$$

On a:

(a) $(AB)C = A(BC)$ dans $M_{l\times p}(\mathbb{K})$ si $C \in M_{n\times p}(\mathbb{K})$

(b) Si $l = m = n$, $AB \neq BA$ en general:

(c) $I_n = \begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ la matrice identité de $M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Alors $I_l \cdot A = A$

$A \cdot I_m = A \quad \forall A \in M_{l\times m}(\mathbb{K})$.

noté A^{-1}

(d) $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ est dite <u>inversible</u> si $\exists B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ avec $AB = I_n = BA$. [On a: A inversible $\Leftrightarrow \det A \neq 0$]

On note $GL_n(\mathbb{K}) = \{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \mid A \text{ inversible} \}$.
Alors $I_n \in GL_n(\mathbb{K})$, et si $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A\cdot B \in GL_n(\mathbb{K})$ (avec $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$) et $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ (avec $(A^{-1})^{-1} = A$).

6.41 Proposition Soient U, V, W des $\mathbb{K}$-esp. de dim finie, et $f : U \to V$, $g : V \to W$ $\mathbb{K}$-linéaires. Soient $\mathcal{A} \subset U$, $\mathcal{B} \subset V$, $\mathcal{C} \subset W$ des bases. Alors on a

$$\boxed{\{ g\circ f \}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}} = \{ g \}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \cdot \{ f \}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}}$$

preuve : Posons $\mathcal{A} = \{ e_1, \dots, e_\ell \}$, $\mathcal{B} = \{ f_1, \dots, f_m \}$, $\mathcal{C} = \{ g_1, \dots, g_n \}$. Soit $1 \le j \le \ell$; la $j$ème colonne de $\{ g\circ f \}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{C}}$ est $\{ g\circ f(e_j) \}_{\mathcal{C}}$. Posons $\{ f \}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = (a_{ij}) = A$, $\{ g \}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = (b_{ij}) = B$. Alors la proposition suit du calcul suivant :

$$(g\circ f)(e_j) = g\left(\sum_{s=1}^{m} a_{sj} \cdot f_s \right) = \sum_{s=1}^{m} a_{sj}\, g(f_s) =$$
$$= \sum_{s=1}^{m} a_{sj} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{is}\, g_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{s=1}^{m} b_{is} a_{sj} \right) g_i \qquad \#$$

6.42 Remarque Si V et W sont des $\mathbb{K}$-esp. de dimensions n et m respectivement, $\mathcal{B} \subset V$ et $\mathcal{C} \subset W$ des bases, on obtient un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

$$\mathcal{L}(V, W) \longrightarrow M_{m\times n}(\mathbb{K})$$
$$f \longmapsto \{ f \}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$$

(compatible avec la composition / produit des matrices dans un sens qui devrait être clair).

De plus, si $n = m$, f est un isomorphisme si et seulement $\{ f \}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ est inversible ; $\{ Id_V \}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = I_n$ et $\{ f^{-1} \}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \left(\{ f \}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \right)^{-1}$.

6.43 Définition : Soit V un $\mathbb{K}$-espace de dim n, et $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset V$ deux bases de V.
On appelle <u>matrice de passage</u> (de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$) la matrice

$$\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}{P} := \{ Id_V \}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \in GL_n(\mathbb{K})$$

(inversible car $Id_V : V \to V$ est un isomorphisme !).
En particulier, on a :

(a) $P\{x\}_{\mathcal{C}} = \{id\}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \{x\}_{\mathcal{C}} = \{ id(x) \}_{\mathcal{B}} = \{x\}_{\mathcal{B}}$, pour tout $x \in V$.

(b) $\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}{P}^{-1} = \underset{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}{P}$

(c) Si $g : V \to W$ est linéaire, et si $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset V$, $\mathcal{D}, \mathcal{E} \subset V$ sont des bases, alors

$$\{g\}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}} = \{id\}^{\mathcal{D}}_{\mathcal{E}} \cdot \{g\}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}} \cdot \{id\}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \quad \text{par } 6.41,$$

c'est-à-dire $\{g\}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}} = \underset{\mathcal{E}\to\mathcal{D}}{P} \{g\}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{D}} \underset{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}{P}$

(d) Si $f : V \to V$, et $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subset V$ deux bases, alors

$$\{f\}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} = \{id\}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} \{f\}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \{id\}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

$$= \underset{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}{P} \{f\}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \underset{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}{P}^{-1}$$

<u>Remarque</u> : Mieux vaut utiliser la notation $\{id\}^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ que $\underset{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}{P}$!!!

6.44 Exemple Reprenons l'exemple 6.39 :

$\{f\}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \{id\}^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}} \cdot \{f\}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}'}$; on avait $\{f\}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\{f\}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On calcule $\{id\}^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

vérifions : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ok.