ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALFORMEN UND MANNIGFALTIGKEITEN

Blatt 1*, 09.04.2010

Aufgabe 1.1. Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und sei $U \subset M$ eine offene Teilmenge, die mit der Teilraumtopologie versehen ist. Beweise, dass U die Struktur einer C^∞ -Mannigfaltigkeit besitzt.

Aufgabe 1.2. Sei $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Topologie versehen, sei $\mathbb{R} \times \{1, 2\}$ das Produkt von $\mathbb{R}$ mit dem diskreten Raum $\{1, 2\}$, und sei P der Quotientenraum von $\mathbb{R} \times \{1, 2\}$ durch die Äquivalenzrelation, die durch $(x, 1) \sim (x, 2)$ für $x \neq 0$ erzeugt ist. Beweise die folgenden Aussagen:

- (a) P ist zweit-abzählbar;
- (b) P besitzt einen C^∞ -Atlas;
- (c) P ist kein Hausdorffraum.

Aufgabe 1.3. Sei $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Topologie versehen. Sei $Q \subset \mathbb{R}^2$ das Quadrat, das als

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x, y \leq 1, |x| = 1 \text{ oder } |y| = 1\}$$

definiert ist, und mit der Teilraumtopologie versehen ist. Beweise, dass man Q mit der Struktur einer 1-dimensionalen C^∞ -Mannigfaltigkeit versehen kann.

Aufgabe 1.4. Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- (a) M ist zusammenhängend;
- (b) M ist wegzusammenhängend.

Zeige, dass die Zusammenhangskomponenten von M offen sind, und dass es abzählbar-viele davon gibt.

Aufgabe 1.5. Seien $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$ mit der Euklidischen Topologie versehen. Wir definieren topologische Räume A , B und C wie folgt:

- (a) A ist die Vereinigung der Kreise mit Mittelpunkt $(0, n)$ und Radius n in $\mathbb{R}^2$ für alle $n \geq 1$, versehen mit der Teilraumtopologie;
- (b) B ist die Vereinigung der Kreise mit Mittelpunkt $(0, \frac{1}{n})$ und Radius $\frac{1}{n}$ in $\mathbb{R}^2$ für alle $n \geq 1$, versehen mit der Teilraumtopologie (die sog. hawaiischen Ohrringe);
- (c) C ist der Quotientenraum $\mathbb{R}/\sim$, wobei $x \sim y$ genau dann, wenn $x = y$ oder $x, y \in \mathbb{Z}$.

Welche dieser Räume sind homöomorph?

Information zum Übungsbetrieb auf der Rückseite.

---

*Abgabe: Montag 19.04.2010 vor der Vorlesung.

<http://www.math.uni-muenster.de/u/ausoni/manifolds-SS10.html>

Information zum Übungsbetrieb

Die Einteilung in die Übungsgruppen erfolgt während der Pause der ersten Vorlesung am 12. April 2010. Die Übungen finden ab der ersten Semesterwoche statt. Wir raten Ihnen, die Übungen regelmäßig zu besuchen, dort werden die Übungsaufgaben besprochen und Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen beantwortet.

Jeweils freitags ab 12 Uhr auf der Veranstaltungshomepage (siehe unten) liegt ein neues Blatt zum Herunterladen, das Sie innerhalb der darauf folgenden Woche bearbeiten sollen. Die Übungsblätter werden auch in gedruckter Form montags in der Vorlesung verteilt.

Die Abgabe findet montags vor der Vorlesung im Hörsaal statt. Beschriften Sie bitte Ihre Lösungen mit

- Ihrem Namen und Vornamen,
- dem Namen des Übungsgruppenleiters.

Es dürfen bis zu zwei Teilnehmer aus derselben Übungsgruppe gemeinsam abgeben. Die Lösungen werden dann von Ihrem Übungsgruppenleiter korrigiert und in der nächsten Übungsgruppe zurückgegeben.

Voraussichtlich gibt es für jedes Aufgabenblatt 20 Punkte, die sich gleichmäßig auf die Aufgaben verteilen. Voraussetzungen für die Zulassung zur Prüfung sind

- mehr als die Hälfte der Übungen aus den Übungsblättern gelöst eingereicht zu haben,
- mindestens dreimal eine Übung an der Tafel vor der Übungsgruppe präsentiert zu haben.

Die Homepage der Veranstaltung, mit weiterer Information, finden Sie unter

<http://www.math.uni-muenster.de/u/ausoni/manifolds-SS10.html>

Fragen, Kommentare und Anregungen sind willkommen! Melden Sie sich einfach nach der Vorlesung oder kommen Sie zur Sprechstunde (donnerstags 13-14 Uhr, Büro 507). Wir können auch gerne einen anderen Termin in der Vorlesung oder per E-mail vereinbaren.

E-mail: ausoni@uni-muenster.de

Wir wünschen Ihnen weiterhin viel Erfolg im Studium !