

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALFORMEN UND MANNIGFALTIGKEITEN

Blatt 10*, 18.06.2010

Aufgabe 10.1. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit und seien $\omega_1 \in \Omega^p(M)$, $\omega_2 \in \Omega^q(M)$. Beweise, dass $\omega_1 \wedge \omega_2$ eine C^∞ $(p+q)$ -Form ist.

Aufgabe 10.2. Sei $f : M \rightarrow N$ eine surjektive Submersion. Beweise, dass

$$f^* : \Omega^* N \rightarrow \Omega^* M$$

injektiv ist.

Aufgabe 10.3. Betrachte die Formen $\omega_i \in \Omega^*(\mathbb{R}^3)$ und $\eta \in \Omega^*(\mathbb{R}^{2n})$, die durch

$$\omega_1 = x_2 x_3 dx_1 + x_1 x_3 dx_2 + x_1 x_2 dx_3,$$

$$\omega_2 = x_1 dx_1 + x_1^2 x_2^2 dx_2 + x_2 x_3 dx_3,$$

$$\omega_3 = 2x_1 x_2^2 dx_1 \wedge dx_2 + x_3 dx_2 \wedge dx_3, \quad \text{und}$$

$$\eta = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$$

definiert sind.

- (a) Bestimme, welche Formen aus $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ exakt und welche abgeschlossen sind.
- (b) Berechne $\eta^{\wedge n} \in \Omega^{2n}(\mathbb{R}^{2n})$.

Aufgabe 10.4. Sei $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ gegeben durch

$$\omega = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2.$$

Zeige, dass ω abgeschlossen aber nicht exakt ist.

Aufgabe 10.5. Betrachte den Komplex

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{d} \Omega^3(\mathbb{R}^3).$$

Mit Hilfe der kanonischen Basen von $\Omega^i(\mathbb{R}^3)$ als $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ -Moduln, gib explizite Formeln für d an.

*Abgabe: Montag 28.06.2010 vor der Vorlesung. Die Aufgabe 10.5 wird nicht bewertet.
<http://www.math.uni-muenster.de/u/ausoni/manifolds-SS10.html>