

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALFORMEN UND MANNIGFALTIGKEITEN

Blatt 11*, 25.06.2010

Aufgabe 11.1. Seien M und N zwei C^∞ Mannigfaltigkeiten, $f : M \rightarrow N$ eine C^∞ Abbildung. Der induzierte Homomorphismus $f^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ hat die folgenden Eigenschaften:

- (a) Für alle $\omega \in \Omega^p(N)$ und $\eta \in \Omega^q(N)$ gilt $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$.
- (b) Für $\omega \in \Omega^0(N)$ gilt $f^*\omega = \omega \circ f$,
- (c) $df^* = f^*d$.

Beweise (a) und (b) (womit (c) in der Vorlesung bewiesen wurde). Beweise auch, dass (a), (b) und (c) den Homomorphismus $f^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$ eindeutig charakterisieren.

Aufgabe 11.2. Sei $\omega \in \Omega^p(M)$. Beweise, dass für alle $X_1, \dots, X_{p+1} \in \mathfrak{X}(M)$ die folgende Formel gilt:

$$(d\omega)(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1})) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}).$$

Hinweis: Verwende Aufgabe 8.2. Zeige zuerst, dass der rechte Ausdruck eine $C^\infty(M)$ -multilineare alternierende Form auf $\mathfrak{X}(M)^{p+1}$ definiert. Es genügt dann, diese Formel für jede Karte (U, ϕ) und für $X_1, \dots, X_{p+1} \in \{\frac{\partial}{\partial \phi_k} \mid 1 \leq k \leq n\}$ zu beweisen, wobei n die Dimension von M ist.

Aufgabe 11.3. Sei $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ gegeben durch

$$\omega(x) = \frac{1}{\|x\|^n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} x_i dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_i} \wedge \dots \wedge dx_n.$$

- (a) Zeige, dass ω abgeschlossen ist.
- (a) Im Fall $n = 3$ zeige, dass ω nicht exakt ist.

Hinweis: Betrachte die Parametrisierung einer Teilmenge von $S^2 \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, die durch

$$\begin{aligned} \phi : D = (0, 2\pi) \times (0, \pi) &\rightarrow S^2, \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\cos(\alpha) \sin(\beta), \sin(\alpha) \sin(\beta), -\cos(\beta)) \end{aligned}$$

gegeben ist. Berechne $\int_D f d\alpha d\beta$, wobei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\phi^* \omega = f d\alpha \wedge d\beta$ definiert ist.

Aufgabe 11.4. Sei $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von $\mathbb{R}$ -Vektorräumen, mit A und C endlich-dimensional. Beweise, dass $A \oplus C$ und B isomorph sind.

*Abgabe: Montag 5.07.2010 vor der Vorlesung.

<http://www.math.uni-muenster.de/u/ausoni/manifolds-SS10.html>