Ch. Ausoni, M. Röer WWU Münster, Sommersemester 2010

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALFORMEN UND MANNIGFALTIGKEITEN

Blatt 13*, 09.07.2010

Aufgabe 13.1. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit der Dimension n. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) M ist orientierbar.

(b) Eine n-Form $\omega \in \Omega^n(M)$ existiert, mit $\omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$.

Aufgabe 13.2. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit mit Rand. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Ein Vektorfeld $X \in \mathfrak{X}(M)$ existiert, so dass $X_p \neq 0$ und nach innen gerichtet ist, für alle $p \in \partial M$.

(b) Ist M orientiert, und ist $\omega \in \Omega^n(M)$ eine Form, die die Orientierung bestimmt, so bestimmt $i_X\omega \in \Omega^n(\partial M)$ die induzierte Orientierung von ∂M. Hier ist $i_X\omega$ durch

$$i_X\omega_p(v_1, \ldots, v_{n-1}) = \omega_p(v_1, \ldots, v_{n-1}, X_p)$$

für alle $p \in \partial M$ und alle $v_1, \ldots, v_{n-1} \in T_p\partial M$ definiert.

Aufgabe 13.3. Berechne $H^*(\mathbb{R}P^n)$ für alle $n \geq 1$. Beweise: ist n gerade, so ist $\mathbb{R}P^n$ nicht orientierbar.

Hinweis: Sei $\pi : S^n \to \mathbb{R}P^n$ die kanonische Projektion, und sei $a : S^n \to S^n$ die Einschränkung der antipodalen Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $x \mapsto -x$. Benutze Aufgabe 10.2 um zu beweisen, dass

$$\pi^* : \Omega^*(\mathbb{R}P^n) \to \Omega^*(S^n)$$

injektiv ist. Das minimal Polynom von a^* ist $x^2 - 1$, also ist a^* diagonalisierbar mit Eigenwerten ± 1. Seien $\Omega^*_+(S^n)$ und $H^*_+(S^n)$ die Eigenräume zum Eigenwert 1. Dann gilt $\pi^*(\Omega^*(\mathbb{R}P^n)) = \Omega^*_+(S^n)$, und

$$\pi^* : H^*(\mathbb{R}P^n) \to H^*_+(S^n)$$

ist ein Isomorphismus. Berechne dann $H^*_+(S^n)$ mit Hilfe von Korollar 5.29.

Aufgabe 13.4. Beweise, dass die $\mathbb{R}$-Algebren $H^*(\mathbb{C}P^2)$ und $\mathbb{R}[x]/(x^3)$ mit $|x| = 2$ isomorph sind.

---

*Abgabe: Montag 19.07.2010 beim Tutor.
`http://www.math.uni-muenster.de/u/ausoni/manifolds-SS10.html`