Ch. Ausoni, M. Röer WWU Münster, Sommersemester 2010

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALFORMEN UND MANNIGFALTIGKEITEN

Blatt 2*, 16.04.2010

Aufgabe 2.1. Sei $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ und seien M und N zwei C^r-Mannigfaltigkeiten der Dimension m und n. Sei $M \times N$ mit der Produkt-Topologie versehen. Beweise, dass $M \times N$ eine C^r-Mannigfaltigkeit der Dimension $m + n$ ist.

Aufgabe 2.2. Sei $n \geq 1$, und sei $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \,|\, \|x\|_2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ die n-Sphäre. Für $i = 1, \ldots, n+1$, seien

$$U_{+i} = \{x \in S^n \,|\, x_i > 0\}, \quad U_{-i} = \{x \in S^n \,|\, x_i < 0\}$$

und $\psi_{\pm i} : U_{\pm i} \to \mathring{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x\|_2 < 1\}$ durch

$$\psi_{\pm i}(x) = (x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{n+1})$$

gegeben, wobei $\hat{x}_i$ bedeutet, dass man x_i ausgelassen hat. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Familie $\{(U_{\pm i}, \psi_{\pm i}) \,|\, 1 \leq i \leq n+1\}$ bildet einen C^∞-Atlas von S^n.

(b) Dieser Atlas ist mit dem Atlas aus der Vorlesung (der aus zwei stereographischen Projektionen besteht) C^∞-verträglich.

Aufgabe 2.3. Entscheide, ob die folgenden Räume topologische Mannigfaltigkeiten sind, und begründe deine Antwort.

(a) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ mit der Produkt-Topologie, wobei $\mathbb{R}$ mit der Euklidischen Topologie versehen ist, und $\mathbb{Q}$ diskret ist.

(b) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ als Teilraum des Euklidischen $\mathbb{R}^2$.

(c) $(\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R})$ als Teilraum des Euklidischen $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2.4. Sei X ein Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $X/\sim$ der Quotientenraum. Sei $\pi : X \to X/\sim$ die kanonische Projektion. Ferner sei $X \times X$ mit der Produkt-Topologie versehen, und sei die Äquivalenzrelation $\sim$ als Teilmenge

$$R = \{(x, y) \in X \times X \,|\, x \sim y\}$$

von $X \times X$ gefasst. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Ist X zweit-abzählbar und π offen, so ist $X/\sim$ auch zweit-abzählbar.

(b) Ist π offen und R abgeschlossen in $X \times X$, so ist $X/\sim$ Hausdorff.

Aufgabe 2.5. Beweise, dass $\mathbb{C}P^n$ eine C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension $2n$ ist.

---

*Abgabe: Montag 26.04.2010 vor der Vorlesung.
`http://www.math.uni-muenster.de/u/ausoni/manifolds-SS10.html`