Ch. Ausoni, M. Röer WWU Münster, Sommersemester 2010

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALFORMEN UND MANNIGFALTIGKEITEN

Blatt 3*, 23.04.2010

Aufgabe 3.1. Seien M und N zwei C^∞ Mannigfaltigkeiten, und sei $\phi : M \to N$ eine stetige Abbildung. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) ϕ ist C^∞,
(b) Für jede C^∞ Funktion $f : U \to \mathbb{R}$, wobei $U \subset N$ offen ist, ist $f \circ \phi|_{\phi^{-1}(U)}$ auch C^∞.

Aufgabe 3.2. Sei $n \geq 0$. Erweitere die Koordinaten-Systeme von S^n aus Aufgabe 2.2 zu Koordinaten-Systemen von $\mathbb{R}^{n+1}$, um zu beweisen, dass S^n eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Aufgabe 3.3. Seien M und N zwei C^∞ Mannigfaltigkeiten, und sei $f : M \to N$ eine C^∞ Abbildung. Beweise, dass der Graph von f

$$\Gamma(f) = \{(m, n) \in M \times N \,|\, n = f(m)\}$$

eine Untermannigfaltigkeit des Produktes $M \times N$ ist.

Aufgabe 3.4. Beweise, dass S^1 und $\mathbb{R}P^1$ diffeomorph sind.

Aufgabe 3.5. Sei X ein Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $X/\sim$ der Quotientenraum. Sei $\pi : X \to X/\sim$ die kanonische Projektion. Ferner sei $Y \subset X$ ein saturierter Teilraum (also $\pi^{-1}(\pi(Y)) = Y$), und sei $\mu : Y \to \pi(Y)$ die Einschräkung von π. Hier ist $\pi(Y) \subset X/\sim$ mit der Teilraumtopologie versehen. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Ist Y offen oder abgeschlossen in X, so ist μ eine Quotienten-Abbildung.
(b) Ist π offen oder abgeschlossen, so ist μ eine Quotienten-Abbildung.

*Abgabe: Montag 3.05.2010 vor der Vorlesung.
http://www.math.uni-muenster.de/u/ausoni/manifolds-SS10.html