Ch. Ausoni, M. Röer WWU Münster, Sommersemester 2010

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALFORMEN UND MANNIGFALTIGKEITEN

Blatt 4*, 30.04.2010

Aufgabe 4.1. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < b < a$. Beweise, dass

$$N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \big(a - (x^2+y^2)^{1/2}\big)^2 + z^2 = b^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

eine C^∞ Untermannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

Aufgabe 4.2. Seien $L \subset M$ und $M \subset N$ zwei C^∞ Untermannigfaltigkeiten. Beweise, dass $L \subset N$ auch eine Untermannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 4.3. Seien $N \subset M$ und $L \subset K$ zwei C^∞ Untermannigfaltigkeiten, und sei $f : M \to K$ eine C^∞ Abbildung. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Die Einschränkung $f|_N$ ist eine C^∞ Abbildung von Mannigfaltigkeiten.

(b) Gilt $f(M) \subset L$, so ist die Einschränkung (des Zieles) $f : M \to L$ eine C^∞ Abbildung.

Aufgabe 4.4. Sei $k \geq 1$ und sei $p_k : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung, die für $z = (z_1, \ldots, z_5) \in \mathbb{C}^5 \cong \mathbb{R}^{10}$ durch

$$p_k(z) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

definiert ist. Beweise, dass

$$\Sigma_k^7 = \{x \in \mathbb{R}^{10} \,|\, p_k(x) = 0 \text{ und } \|x\|_2^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{10}$$

eine 7-dimensionale Untermannigfaltigkeit ist.

Bemerkung: Die Mannigfaltigkeit Σ_k^7 heißt eine 7-dimensionale *Brieskorn Sphäre*. In der Liste $\Sigma_1^7, \ldots, \Sigma_{28}^7$ sind je zwei Elemente nicht diffeomorph, und diese Liste enthält, bis auf Diffeomorphismus, alle C^∞ Strukturen auf der (orientierten) topologischen Mannigfaltigkeit S^7.

Aufgabe 4.5. Beweise die folgende Aussage mit Hilfe des Weierstraß-Approximationssatzes. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit, $A \subset M$ ein kompakter Teilraum, $f : M \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f|_A$ C^∞. Zu jeder positiven stetigen Funktion $\epsilon : M \to \mathbb{R}$ existiert eine C^∞ Funktion $h : M \to \mathbb{R}$, mit

(a) $h(a) = f(a)$ für alle $a \in A$,

(b) $|h(x) - f(x)| < \epsilon(x)$ für alle $x \in M$.

---

*Abgabe: Montag 10.05.2010 vor der Vorlesung.
`http://www.math.uni-muenster.de/u/ausoni/manifolds-SS10.html`