Ch. Ausoni, M. Röer WWU Münster, Sommersemester 2010

ÜBUNGEN ZUR DIFFERENTIALFORMEN UND MANNIGFALTIGKEITEN

Blatt 8*, 04.06.2010

Aufgabe 8.1. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit. Beweise, dass TM Hausdorff und zweit-abzählbar ist.

Aufgabe 8.2. Sei M eine Mannigfaltigkeit, seien $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ zwei C^∞ Vektorfelder auf M und $f, g \in C^\infty(M)$ zwei C^∞ Funktionen $M \to \mathbb{R}$. Beweise die folgenden Identitäten.

(a) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

(b) $[X, Y] = -[Y, X]$.

Aufgabe 8.3. Sei M eine Mannigfaltigkeit und seien $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Beweise die *Jacobi-Identität*

$$\big[[X,Y],Z\big] + \big[[Y,Z],X\big] + \big[[Z,X],Y\big] = 0\,.$$

Aufgabe 8.4. Sei M eine C^∞ Mannigfaltigkeit. Eine Derivation von $C^\infty(M)$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ mit $\delta(fg) = f\delta(g) + g\delta(f)$ für alle $f, g \in C^\infty(M)$. Sei $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$ die Menge aller Derivationen von $C^\infty(M)$. Beweise, dass $\mathfrak{X}(M) \to \mathrm{Der}(C^\infty(M))$, $X \mapsto \{f \mapsto X(f)\}$ ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus ist.

*Abgabe: Montag 14.06.2010 vor der Vorlesung.
`http://www.math.uni-muenster.de/u/ausoni/manifolds-SS10.html`