ALGÈBRE 1 : INTRODUCTION AUX STRUCTURES MATHÉMATIQUES

Feuilles d'exercices

- Page du cours : `https://www.math.univ-paris13.fr/~ausoni/cours-ism-2020.html`
- Chacune des feuilles 1 à 11 est à travailler lors de la semaine du semestre correspondante.
- Les exercices marqués d'un ► sont à résoudre en autonomie et à rédiger soigneusement pour le TD de la semaine suivante.
- Les exercices marqués d'un ♣ sont des exercices qui peuvent être débutés en TD et travaillés en autonomie ; leur correction sera faite en TD d'amphi (donc en amphi après le cours).
- Les exercices marqués d'un ♠ sont des exercices supplémentaires facultatifs qui ne seront pas traités en TD au Semestre 1, mais il est vivement conseillé de les travailler en autonomie.

Feuille 1

Exercice 1.1. On considère un ensemble $A = \{a, b, c\}$. Déterminez si les notations suivantes sont correctes ou non, et expliquez pourquoi. Quand elles sont correctes, exprimez-les "en français".

1. $A \subset A$ 2. $a \subset A$ 3. $\emptyset \in A$ 4. $\emptyset \subset \{a, c\}$ 5. $\{b\} \in A$ 6. $b \in A$ 7. $\{\emptyset\} \subset A$ 8. $\{c\} \subset A$

Exercice 1.2. Écrivez en extension les ensembles suivants. On rappelle que si A est un ensemble, $P(A)$ désigne l'ensemble des parties de A.

(a) L'ensemble Γ des entiers naturels plus petits ou égaux à 5.
(b) Le sous-ensemble Λ de notre alphabet formé des lettres du mot GALILEE.
(c) L'ensemble Ξ des lettres de l'alphabet grec (en minuscule s'il-vous-plait ☺).
(d) $E = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ n \leq 20 \text{ et } \exists k \in \mathbb{N} \text{ avec } n = 3k - 1\}$.
(e) $G = \{X \in P(\{a, b, c, d\})\ ;\ a \notin X\}$.
(f) $P\big(P(A)\big)$, où $A = \{0\}$.
► (g) $H = \big\{X \in P(\{a, b, c, d\});\ a \in X \ \text{ ou } \ X \subset \{b, c\}\big\}$.

Exercice 1.3. Écrivez en compréhension les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ suivants :

(a) Le sous ensemble Π des nombres pairs.
(b) $\Sigma = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20\}$.
(c) Le sous-ensemble Φ des nombres qui sont des carrés.
(d) Le sous-ensemble Ψ des nombres qui sont des puissances de 2.
► (e) Le sous-ensemble Ω des multiples de 2 qui ne sont pas des multiples de 4.

Exercice 1.4. Soit $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Donnez la liste des éléments de $P(A)$.
(b) Donnez la liste des éléments de $P(B)$.
(c) Donnez la liste des éléments de $P(B)$ ne contenant pas 4. En déduire, en utilisant $P(B)$, une écriture en compréhension de $P(A)$.

Exercice 1.5. On considère les ensembles suivants

$$E_1 = \{n \in \mathbb{Z}\ ;\ \exists\, k \in \mathbb{N}, n > k + 3\}\,,$$
$$E_2 = \{n \in \mathbb{Z}\ ;\ \forall\, k \in \mathbb{N}, n > k + 3\}\,,$$
$$E_3 = \{n \in \mathbb{Z}\ ;\ \exists\, k \in \mathbb{N}, n < k + 3\}\,,$$
$$E_4 = \{n \in \mathbb{Z}\ ;\ \forall\, k \in \mathbb{N}, n < k + 3\}\,.$$

(a) Les nombres $-5, 0, 1, 4$ et 10 appartiennent-ils à l'ensemble E_1 ? Démontrer (en utilisant une double inclusion) que $E_1 = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ n \geq 4\}$.
(b) Essayer de même de voir si les nombres $-5, 0, 1, 4$ et 10 appartiennent aux trois autres ensembles. Trouver (à l'aide d'autres exemples si besoin) ce que peuvent être ces ensembles, puis le prouver (via double inclusion si nécessaire).
(c) Écrire les inclusions satisfaites entre les ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4.

Exercice 1.6. Soit E un ensemble.
(a) Dessinez un diagramme de Venn pour trois sous-ensembles A, B et C de E. Combien de plages a-t-il ?
(b) Posons $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A = \{1, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 6, 7\}$ et $C = \{3, 4, 5, 7\}$. Placez chaque élément de E dans le diagramme de Venn, dans la plage à la quelle il appartient.
(c) Combien d'éléments contient la plage $C \smallsetminus (A \cup B)$?
(d) Exprimez en termes de E, A, B, C, $\cup$, $\cap$ et $\smallsetminus$ les plages ne contenant aucun élément.
(e) Posons maintenant $F = \{a, b, c\}$. On remarque qu'il y a autant d'éléments dans $P(F)$ que de plages dans le diagramme de Venn dessiné en (a). Définissez une règle permettant d'associer à chaque élément de $P(F)$ une unique plage du diagramme.

♣ **Exercice 1.7.** Soit E un ensemble
(a) Dessinez un diagramme de Venn pour quatre sous-ensembles A, B, C et D de E.
(b) Combien de plages a-t-il ?
(c) Posons $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. Placez ces éléments dans 7 plages différentes, au hasard, puis donnez A, B, C et D en extension.

Exercice 1.8. Soit E un ensemble, et A, B, C trois sous-ensembles de E. Montrez que l'assertion $A \cup B = B \cap C$ implique $A \subset B \subset C$.

► **Exercice 1.9.** Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles quelconques de E.
(a) Démontrer que $(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B)$.
(b) Démontrer que $(A \cup B = B) \Rightarrow (A \subset B)$.

Que peut-on en déduire ?

Exercice 1.10. Soit E un ensemble, et A, B, C trois sous-ensembles de E.
(a) Ecrire quatre inclusions satisfaites par $B \cap C$.
(b) Démontrer que $B \cap C \subset A \cup B$.
(c) Quand ($A \subset B$ et $B \subset C$) est vérifié, écrire toutes les inclusions possibles entre $A \cup B$ et l'un des ensembles A, B et C.
(d) Démontrer que $\big((A \cup B) \subset (B \cap C)\big) \Leftrightarrow \big((A \subset B)$ et $(B \subset C)\big)$.

♣ **Exercice 1.11.** Soit E un ensemble et A, B et C des sous-ensembles. Déterminez les implications existant entre les conditions suivantes sur C :
(1) $C \subset A \cup B$;
(2) $C \subset A$ ou $C \subset B$;
(3) $C \subset A$ et $C \subset B$.

Exercice 1.12. Soit A et B des parties d'un ensemble E.
Trouver une condition simple (sur A et B) équivalente à la proposition $A \smallsetminus B = B \smallsetminus A$.

Exercice 1.13. Soit E un ensemble, et A et B deux sous-ensembles de E. Démontrer que

$$A \setminus B = (E \setminus B) \setminus (E \setminus A) .$$

Exercice 1.14. Soit E un ensemble, et A et B deux sous-ensembles de E.

(a) Soit X un sous-ensemble de E. Supposons $A \subset B$. Sous quelles conditions sur X a-t-on $A \cup X = B$?

► (b) Soit X un sous-ensemble de E. Sous quelles conditions sur X a-t-on $A \cap X = B$?

♣ **Exercice 1.15.** Soit E un ensemble, et soient A et B deux sous-ensembles de E.

(a) Justifiez pourquoi $P(A)$ est un sous-ensemble de $P(E)$.

(b) Indiquez quelles inclusions existent entre les ensembles suivants :

$$P(A \cap B)\,, \quad P(A) \cap P(B)\,, \quad P(A \cup B) \ \text{ et } \ P(A) \cup P(B)\,.$$

Certains de ces ensembles sont-ils égaux ? Justifiez vos réponses et donnez un contre-exemple pour les inclusions qui ne sont pas vraies en général.

Exercices supplémentaires facultatifs

♠ **Exercice 1.16.** On considère l'ensemble $A = \{1, 2, 3\}$. En utilisant A ou $P(A)$, compléter les notations suivantes pour qu'elles soient correctes.

$$A \subset \ldots, \quad \{1\} \in \ldots, \quad \emptyset \in \ldots, \quad \emptyset \subset \ldots, \quad \{1,2\} \in \ldots, \quad 2 \in \ldots, \quad \{\emptyset\} \subset \ldots, \ \text{ et } \ \{3\} \subset \ldots.$$

♠ **Exercice 1.17.** Écrivez en extension les ensembles suivants :

(a) L'ensemble Δ des entiers naturels plus petits que 50 qui sont des carrés.

(b) L'ensemble Θ des puissances de 10 de 1 à 1'000'000.

(c) $F = \{n \in \mathbb{N}\,;\ 10 \leq n \leq 30 \text{ et } n \neq 2k,\ \forall k \in \mathbb{N}\}$.

♠ **Exercice 1.18.** Selon les cas, écrivez en extension ou en compréhension les ensembles suivants :

(a) Le sous ensemble des nombres entiers multiple de 2 ou multiple de 5.

(b) $E = \{n \in \mathbb{N}\,;\ n \leq 30 \text{ et } \exists\, k \in \mathbb{N}, n = 2k \text{ et } n = 3k\}$.

(c) $F = \{n \in \mathbb{N}\,;\ n \leq 30 \text{ et } \exists\, (k, k') \in \mathbb{N}^2, n = 2k = 3k'\}$.

(d) $G = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

(e) L'ensemble des sous-ensembles de l'ensemble des lettres du mot "zoo".

♠ **Exercice 1.19.** Soit $P(\{a, b, c, d\})$ l'ensemble des parties de $\{a, b, c, d\}$. On a $P(\{a, b, c\}) \subset P(\{a, b, c, d\})$.

(a) Donnez en extension $P(\{a, b, c\})$.

(b) Donnez en extension $\{X \in P(\{a, b, c, d\})\ ;\ d \in X\}$. Quel est le nombre d'éléments de $P(\{a, b, c, d\})$?

(c) Dessinez un diagramme de Venn pour quatre sous-ensembles A, B, C et D d'un ensemble E. Posons $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Placez ces éléments dans 7 plages différentes, au hasard, puis donnez A, B, C et D en extension.

♠ **Exercice 1.20.** Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Démontrer l'implication

$$\big((A \cap B) = (A \cap C)\big) \Rightarrow \Big(\big(A \cap (E \setminus B)\big) \subset \big(A \cap (E \setminus C)\big)\Big).$$

♠ **Exercice 1.21.** Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles quelconques de E. Les assertions

(1) $A \neq B$

(2) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \neq \emptyset$

sont-elles équivalentes ?

Feuille 2

Exercice 2.1. On considère les implications suivantes entre propriétés portant sur les éléments $n \in \mathbb{N}$. Pour chacune des paires de propositions $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ données sur une même ligne du tableau ci-dessous, dire si l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et l'implication $\mathcal{P} \Leftarrow \mathcal{Q}$ sont vraies ou fausses, et pourquoi.

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$
1.	$(n \geq 5)$	$(n \geq 3)$
2.	$(n \geq 5)$	$(n > 6)$
3.	$(n \geq 3)$	$(n \leq 6)$
4.	$(n < 1)$	$(2 \mid n)$
5.	$(n \geq 1)$	$(n = n^2)$
6.	$(n \geq n+1)$	$(n = 2)$
7.	$(n \geq 0)$	$(n < n+1)$

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$
8.	$(n^2 = 2)$	$(n > n)$
9	$(n > 5) \wedge (n \mid 12)$	$(n = 6)$
10.	$\big((n > 6) \wedge (n \mid 12)\big)$	$(n = 12)$
11.	$\big((3 \mid n) \wedge (4 \mid n)\big)$	$(12 \mid n)$
► 12.	$\big((n \geq 3) \vee (n \geq 5)\big)$	$(n \geq 5)$
► 13.	$\big((3 \mid n) \vee (n \mid 0)\big)$	$(n = n)$
► 14.	$\big((3 \mid n) \vee (n = n+1)\big)$	$(9 \mid n)$

Exercice 2.2. Donnez en extension les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ suivants :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{0;2;5;7\} \cap \{n \in \mathbb{N} \,;\, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\} \\
E_2 &= \{0;2;5;7\} \cup \{n \in \mathbb{N} \,;\, n^2 \leq 20\} \\
E_3 &= \{x \in \mathbb{N} \,;\, \exists k \in \mathbb{N}, x = k^2\} \cap \{n \in \mathbb{N} \,;\, n \leq 12\} \\
E_4 &= \{n \in \mathbb{N} \,;\, n^2 \leq 20\} \cup \big(\{0;2;5;7\} \cap \{n \in \mathbb{N} \,;\, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}\big) \\
E_5 &= \big(\{n \in \mathbb{N} \,;\, n^2 \leq 20\} \cup \{0;2;5;7\}\big) \cap \{n \in \mathbb{N} \,;\, \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k\}\,.
\end{aligned}$$

Que peut-on observer avec E_4 et E_5 ? Comparer ceci aux propriétés des connecteurs logiques **et** et **ou**.

Exercice 2.3. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$A = [0, \infty[\,, \quad B =]2, \infty[\,, \ \text{ et } \ C =]-\infty, 1[\,.$$

(a) Donnez les propriétés $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ portant sur $x \in \mathbb{R}$ permettant d'écrire A, B et C en compréhension, donc sous la forme $A = \{x \in \mathbb{R} \,; \mathcal{P}(x)\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \,; \mathcal{Q}(x)\}$, et $C = \{x \in \mathbb{R} \,; \mathcal{R}(x)\}$.

(b) Pour chacun des sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants

$$\begin{aligned}
D &= A \cap C & H &= B \cap C \\
E &= B \cup C & I &= \mathbb{R} \setminus G \\
F &= (\mathbb{R} \setminus C) \cap (\mathbb{R} \setminus B) & \blacktriangleright\ J &= C \cap (\mathbb{R} \setminus B) \\
G &= A \cap (C \cup (\mathbb{R} \setminus B) & \blacktriangleright\ K &= \mathbb{R} \setminus J
\end{aligned}$$

(1) donnez la propriété qui caractérise ses éléments, à l'aide d'une formule en termes de $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ et des connecteurs logiques ;

(2) simplifiez, si possible, la formule obtenue, puis exprimez-la en termes d'inégalités ;

(3) écrivez le sous-ensemble comme réunion d'intervalles.

► **Exercice 2.4.** Soit E un ensemble, et soient A, B et C des sous-ensembles de E. Vérifier à l'aide d'un diagramme de Venn les égalités entre sous-ensembles de E énoncées dans la Proposition 2.29.(c).

♣ **Exercice 2.5.** Soit E un ensemble, et soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propriétés portant sur les éléments de E. Démontrer les équivalences entre propriétés énoncées dans la Proposition 2.29.(a).

Exercice 2.6. On considère un ensemble à trois éléments $E = \{1, 2, 3\}$, ainsi que les propriétés suivantes portant sur les éléments x de $P(E)$

$$\mathcal{P}(x) : (1 \in x) \quad \mathcal{Q}(x) : (2 \in x) \quad \mathcal{R}(x) : (x \text{ contient exactement deux éléments}) .$$

Donnez en extension les sous-ensembles de $P(E)$ suivant :

$A = \{x \in P(E) ; \mathcal{P}(x)\}$
$B = \{x \in P(E) ; \mathcal{R}(x)\}$
$C = \{x \in P(E) ; (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})(x)\}$
$D = \{x \in P(E) ; \big(\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{R})\big)(x)\}$

► $F = \{x \in P(E) ; \big((\neg\mathcal{P}) \vee \mathcal{Q}\big)(x)\}$
► $G = \{x \in P(E) ; (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})(x)\}$
$H = \{x \in P(E) ; \Big(\neg\big(\mathcal{P} \vee (\neg\mathcal{Q})\big)\Big)(x)\}$
$I = \{x \in P(E) ; \big(\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})\big)(x)\}$

Exercice 2.7. Soit E un ensemble, et soient A, B et C des sous-ensembles de E. On définit une opération Δ sur les sous-ensembles de E, appelée *différence symétrique*, par la règle

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) .$$

(a) Représentez $A\Delta B$ dans un diagramme de Venn pour les sous-ensembles A et B de E.
(b) Déterminez $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$ et $A\Delta(E \setminus A)$.
(c) Si A et B sont donnés en compréhension par $A = \{x \in E ; \mathcal{P}(x)\}$ et $B = \{x \in E ; \mathcal{Q}(x)\}$, donnez une formule, en terme de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ et des connecteurs logiques, pour la propriété $\mathcal{R}$ portant sur les éléments de E telle que $A\Delta B = \{x \in E ; \mathcal{R}(x)\}$.
(d) Donnez la table de vérité de $\mathcal{R}$ en fonction des valeurs de vérité de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.
► (e) Reprenez les sous-ensembles A, B et C de $\mathbb{R}$ donnés à l'Exercice 2.4. Déterminez $A\Delta B$, $A\Delta C$, et $B\Delta C$.

Exercice 2.8. Soit E un ensemble, et soient A et B des sous-ensembles de E donnés en compréhension par $A = \{x \in E ; \mathcal{P}(x)\}$ et $B = \{x \in E ; \mathcal{Q}(x)\}$.
(a) Illustrer l'égalité $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ par un diagramme de Venn.
(b) Démontrer cette égalité à l'aide la Proposition 2.29.

♣ **Exercice 2.9.** Soit E un ensemble, et soient A, B et C des sous-ensembles de E.
(a) En utilisant les règles données par la Proposition 2.29, démontrez que quels que soient A, B et C, on a l'égalité

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C) .$$

(b) Représentez l'égalité ci-dessus dans un diagramme de Venn.
(c) Supposons que A, B et C soient donnés en compréhension par des propriétés $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ respectivement. Exprimez l'égalité donnée en (a) en terme d'équivalence de propositions, et démontrez cette équivalence à l'aide des équivalences données par la Proposition 2.29.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES FACULTATIFS

♠ **Exercice 2.10.** Soit E un ensemble, et soient A, B et C des sous-ensembles de E.
(a) A l'aide de la Proposition 2.29, démontrer les égalités suivantes :

$$A \cup (B \cap (A \cup C)) = A \cup (B \cap C)$$
$$A \cap (B \cup (A \cap C)) = A \cap (B \cup C) .$$

(b) Simplifier l'expression $(A \cup B) \cap (A \cup (E \setminus B))$.

♠ **Exercice 2.11.** On considère les propriétés suivantes portant sur les couples de réels (u,v) :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{P}_1(u,v) : (u^2 = v^2) & \mathcal{P}_4(u,v) : (u = v \text{ et } u = -v) \\ \mathcal{P}_2(u,v) : (u = v) & \mathcal{P}_5(u,v) : (u = 0 \text{ et } v = 0) \\ \mathcal{P}_3(u,v) : (u = v \text{ ou } u = -v) & \end{array}$$

(a) Quelles sont les implications vraies du type $\mathcal{P}_i \Rightarrow \mathcal{P}_j$ avec $1 \leq i, j \leq 5$?
(b) Quelles sont les propriétés équivalentes ?
(c) Pour chaque $i \in \{1,2,3,4,5\}$ on considère le sous-ensemble $E_i = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ \mathcal{P}_i(u,v)\} \subset \mathbb{R}^2$. Comparer les sous-ensembles E_1, E_2 et E_3 pour l'inclusion. Représenter graphiquement E_1.

♠ **Exercice 2.12.** On considère les propriétés suivantes portant sur les réels :

$$\mathcal{P}(x) : (x < 2)\,, \quad \mathcal{Q}(x) : (-1 \leq x < 3) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(x) : (x \geq 4),$$

ainsi que les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ suivants :

$$\begin{array}{ll} A = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ \mathcal{P}(x)\} & E = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ \big(\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{R})\big)(x)\} \\ B = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ \mathcal{Q}(x)\} & F = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ \big((\neg\mathcal{P}) \vee \mathcal{Q}\big)(x)\} \\ C = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ \mathcal{R}(x)\} & G = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})(x)\} \\ D = \{x \in \mathbb{R} \ ; \ (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})(x)\} & \end{array}$$

Écrire ces sous-ensembles sous forme d'intervalles ou de réunion d'intervalles.

♠ **Exercice 2.13.** Soit E un ensemble, et soient A et B des sous-ensembles de E donnés en compréhension par $A = \{x \in E \ ; \ \mathcal{P}(x)\}$ et $B = \{x \in E \ ; \ \mathcal{Q}(x)\}$.
(a) Illustrer l'égalité $(A \smallsetminus B) \cup B = A \cup B$ par un diagramme de Venn.
(b) Démontrer cette égalité en utilisant la Proposition 2.29.

♠ **Exercice 2.14.** Soit E un ensemble. Démontrez les propriétés suivantes de la différence symétrique Δ sur les sous-ensembles de E.
(a) La différence symétrique est associative.
(b) La différence symétrique est commutative.
(c) Pour A et B des sous-ensembles de E, on a les égalités

$$E \smallsetminus (A \Delta B) = (E \smallsetminus A) \Delta B \quad \text{et} \quad (E \smallsetminus A) \Delta (E \smallsetminus B) = A \Delta B\,.$$

Feuille 3

Exercice 3.1. Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions mathématiques. Donnez la table de vérité des propositions suivantes :

$$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee \big((\neg\mathcal{P}) \wedge (\neg\mathcal{Q})\big)$$

$$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}$$

► $\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})\,.$

Exercice 3.2. Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions mathématiques. À l'aide de tables de vérités, montrez que les implications ou équivalences suivantes sont toujours vraies :

$$\big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})\big) \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})$$

► $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad \big((\neg\mathcal{Q}) \Rightarrow (\neg\mathcal{P})\big)\,.$

Exercice 3.3. Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions mathématiques. Donnez la négation de chacune des propositions suivantes. Si nécessaire, vous pouvez rajouter des parenthèses, et utiliser la Remarque 3.11.

1. $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$
2. $\big(\mathcal{P} \vee (\neg\mathcal{Q})\big)$
3. $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$
4. $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$
5. $\Big(\mathcal{P} \wedge \big(\neg(\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})\big)\Big)$
6. $\big((\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}\big)$
7. $\big(\mathcal{P} \wedge (\neg\mathcal{Q})\big)$
8. $\Big(\big(\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})\big) \Rightarrow \mathcal{R}\Big)$

► 9. $\Big(\mathcal{P} \wedge \big(\mathcal{Q} \vee (\neg\mathcal{R})\big)\Big)$

► 10. $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$

► 11. $\big(\mathcal{P} \Rightarrow (\neg\mathcal{Q})\big)$.

Exercice 3.4. Soit E un ensemble, soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ des propriétés portant sur les éléments de E, et soient $A = \{x \in E\ ;\ \mathcal{P}(x)\}$ et $B = \{x \in E\ ;\ \mathcal{Q}(x)\}$ les sous-ensembles de E correspondants. Écrivez en formule avec les quantificateurs et connecteurs nécessaires les propositions suivantes :

$$\mathcal{R}_1 : (A \cap B \neq \emptyset)\,, \quad \mathcal{R}_2 : (A \subset B)\,, \quad \mathcal{R}_3 : (B \not\subset A)\,, \quad \blacktriangleright\ \mathcal{R}_4 : (E = A \cup B)\,.$$

Puis, formulez leur négation en terme d'ensembles, et de proposition.

Exercice 3.5. On considère les propositions mathématiques suivantes :

$$\mathcal{P}_1 : (\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0)$$
$$\mathcal{P}_2 : (\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0)$$
$$\mathcal{P}_3 : (\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0)$$
$$\blacktriangleright\ \mathcal{P}_4 : (\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ xy \geq 0)$$
$$\blacktriangleright\ \mathcal{P}_5 : (\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ xy > 0)\,.$$

Pour chacune de ces propositions, déterminez si elle est vraie ou fausse, puis donner sa négation.

Exercice 3.6. On considère les propositions mathématiques suivantes :

$\mathcal{Q}_1$: *Pour tout nombre réel x, il existe un entier naturel n avec* $n \geq x$.

$\mathcal{Q}_2$: *Le carré de tout nombre réel est plus grand ou égal à* 0.

$\mathcal{Q}_3$: *Tout nombre entier naturel est soit divisible par* 2*, soit divisible par* 3.

► $\mathcal{Q}_4$: *Il existe un nombre rationnel qui n'est pas réel*.

► $\mathcal{Q}_5$: *Il existe un nombre entier naturel plus petit ou égal à* 3 *qui est un carré.*

Pour chacune de ces propositions,
(a) déterminez si elle est vraie ou fausse ;
(b) écrivez-la en formule avec des quantificateurs ;
(c) donnez la négation en formule, puis
(d) reformulez la négation en français.

♣ **Exercice 3.7.** Soit $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions mathématiques. On se propose de vérifier si le connecteur logique $\Rightarrow$ est associatif.

(a) Dressez une table de vérité dont les colonnes donnent les valeurs de vérité de

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}),\ \ (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}),\ \ \big(\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})\big),\ \text{ et }\ \big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}\big)$$

en fonction des valeurs de vérité de $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, et $\mathcal{R}$.

(b) À l'aide de cette table, décidez quelles implications $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$ existent entre les propositions

$$\big(\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})\big) \quad \text{et} \quad \big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}\big)\,.$$

(c) Le connecteur logique $\Rightarrow$ est-il associatif ?

Exercice 3.8. On rappelle que si $m, n \in \mathbb{N}$, on note $(m|n)$ la proposition "m divise n". On considère les propositions mathématiques suivantes :

$$\mathcal{P}_1 : \big(\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}\,,\ (m|n)\big)$$
$$\mathcal{P}_2 : \big(\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\,,\ (m|n)\big)$$
$$\mathcal{P}_3 : \big(\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\,,\ (m|n)\big)$$
$$\mathcal{P}_4 : \big(\exists m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}\,,\ (m|n)\big)$$
$$\clubsuit\ \mathcal{P}_5 : \big(\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\,,\ (m|n) \text{ ou } (n|m)\big)$$
$$\clubsuit\ \mathcal{P}_6 : \Big(\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}\,,\ \big((m|n) \text{ ou } (n|m)\big) \Rightarrow (m = n)\Big)$$
$$\clubsuit\ \mathcal{P}_7 : \big(\forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}\,,\ \big((m|k) \text{ et } (n|k)\big)$$
$$\clubsuit\ \mathcal{P}_8 : \big(\forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}\,,\ (m|kn)\big)$$

Pour chacune de ces propositions,
  (d) reformulez la proposition en français ;
  (a) déterminez si elle est vraie ou fausse et le démontrer ;
  (c) donnez la négation en formule ;
  (d) reformulez la négation en français.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES FACULTATIFS

♠ **Exercice 3.9.** Le quantificateur $\exists!$ s'utilise pour exprimer *l'existence* d'un *unique* élément. Si E est un ensemble et $\mathcal{P}$ une propriété portant sur les éléments de E, la proposition $\big(\exists! x \in E\ ;\ \mathcal{P}(x)\big)$ signifie :

Il existe un et un seul $x \in E$ pour lequel $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

  (a) Exprimez la proposition $Q : \big(\exists! x \in E\,,\ \mathcal{P}(x)\big)$ en terme d'une propriété de l'ensemble $\{x \in E\ ;\ \mathcal{P}(x)\}$.
  (b) Notons $\mathcal{R}_1 : \big(\exists x \in E\,,\ \mathcal{P}(x)\big)$. Formulez une proposition $\mathcal{R}_2$ telle que l'on ait l'implication suivante :

$$Q \Leftrightarrow (\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2)\,,$$

  où $\mathcal{R}_1$ exprime l'existence, et $\mathcal{R}_2$ l'unicité.
  (c) Utilisez la formule $Q \Leftrightarrow (\mathcal{R}_1 \wedge \mathcal{R}_2)$ pour exprimer $(\neg Q)$.

♠ **Exercice 3.10.** Supposons données des propositions $\mathcal{P}$, Q et $\mathcal{R}$, et soit $\mathcal{S}$ la proposition définie par

$$\mathcal{S} : \Big(\big(\mathcal{P} \Rightarrow (Q \Rightarrow \mathcal{R})\big) \Rightarrow \big(\mathcal{R} \vee (\neg\mathcal{P})\big)\Big)\,.$$

  (a) Donnez la table de vérité $\mathcal{S}$ en fonction des valeurs de vérités de $\mathcal{P}$, Q et $\mathcal{R}$.
  (b) La proposition $\mathcal{S}$ est-elle vraie ou fausse ?
  (c) Exprimez $\mathcal{S}$ à l'aide de $\mathcal{P}$, Q et $\mathcal{R}$ et des connecteurs logiques **et** et **non** uniquement.
  (d) Exprimez $\mathcal{S}$ à l'aide de $\mathcal{P}$, Q et $\mathcal{R}$ et des connecteurs logiques **ou** et **non** uniquement.

♠ **Exercice 3.11.** On définit le connecteur de Sheffer noté | (barre de Sheffer) de la façon suivante : si $\mathcal{P}$ et Q sont des propositions, soit

$$(\mathcal{P}|Q) : \big(\neg(\mathcal{P} \wedge Q)\big)\,.$$

  (a) Donnez la table de vérité de la proposition $(\mathcal{P}|Q)$ en fonction des valeurs de vérités de $\mathcal{P}$ et Q.
  (b) Donnez la table de vérité de la proposition $\big((\mathcal{P}|Q)|(\mathcal{P}|Q)\big)$.
  (a) On veut maintenant exprimer les connecteurs usuels en utilisant la barre de Sheffer, et rien qu'elle :
    (1) Donnez la table de vérité de $(\mathcal{P}|\mathcal{P})$, et en déduisez-en que le connecteur **non** peut être défini en n'utilisant que la barre de Sheffer.
    (2) Trouvez une formule équivalente à $(\mathcal{P} \vee Q)$, qui n'utilise que la barre de Sheffer (éventuellement plusieurs fois).
    (3) Trouvez une formule équivalente à $(\mathcal{P} \Rightarrow Q)$.

♠ **Exercice 3.12.** Trois collègues, Albert, Bernard et Charles déjeunent ensemble. Les affrmations suivantes sont vraies :

(1) Si Albert commande un dessert, Bernard en commande un aussi ;
(2) Soit Bernard, soit Charles, mais pas les deux, commandent un dessert ;
(3) Albert ou Charles, ou les deux, commandent un dessert ;
(4) Si Charles commande un dessert, Albert fait de même.

Définissez des propositions de la forme

$$\mathcal{A} : (\text{Albert commande un dessert})\,,$$

et énoncez chacune des ces affirmations en terme de ces propositions et de connecteurs. Puis,

(a) Dressez une table de vérité pour ces affirmations ;
(b) Décidez qui commande un dessert.

Feuille 4

Exercice 4.1. Soient

$$A = \{n \in \mathbb{N}\,;\ (2|n)\} \quad \text{et} \quad B = \{n \in \mathbb{N}\,;\ (\exists m \in \mathbb{N}\,, n = m^2)\}\,.$$

Écrivez en français et comprenez la signification des propositions suivantes. Décidez si elles sont vraies ou fausses, et justifiez-le.

$$Q_1 : (\exists n \in A\,,\ n \in B)$$
$$Q_2 : (\forall n \in A\,,\ n \in B)$$
$$Q_3 : \big(\exists n \in \mathbb{N}, \forall p \in A, \forall q \in B\,, \neg(n = p + q)\big)$$
$$Q_4 : \Big[\forall n \in \mathbb{N}\,, \Big(\big(\exists m \in A\,, (m|n)\big) \Rightarrow (n \in A)\Big)\Big]$$
$$\blacktriangleright\ Q_5 : \big(\forall n \in \mathbb{N}\,, \neg(n \in A) \Rightarrow (n+1 \in A)\big)$$
$$\blacktriangleright\ Q_6 : \Big(\forall n \in \mathbb{N}\,, \big((n \in A) \vee (\exists m \notin A, mn \in B)\big)\Big)$$

Exercice 4.2. Écrivez les propositions suivantes sous forme d'implication, en formule. Puis, énoncez la contraposée et démontrez-la.

(1) Si $n \in \mathbb{N}$ et n^2 est impair, alors n est impair.
(2) Aucun nombre impair n'est la somme de deux nombres impairs.
► (3) Soient $m \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ deux entiers impairs tels que m divise $2n$. Alors m divise n.
(4) Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.
Indication : montrez que si n est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ avec $n = 4k + 1$ ou $4k + 3$. Utilisez alors une preuve par cas.
(5) Si $a \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$, et si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}$ avec $\varepsilon > 0$, on a $a < \varepsilon$, alors $a = 0$.

Exercice 4.3. On rappelle que la valeur absolue d'un nombre réel x est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

Montrez les assertions suivantes par disjonction :

(a) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $n(n+1)$ est pair.
► (b) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.
(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice 4.4. Démontrez par l'absurde les propositions suivantes :

(a) Si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$, alors $\sqrt{n^2 + 1}$ n'est pas un nombre entier.
(b) Il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}$ avec $n \cdot 0 = 1$.
► (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$. Si on repartit $n + 1$ pièces d'un euro entre n personnes, au moins l'une des personnes aura plus d'un euro.

Exercice 4.5. Représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles suivants :

(a) $\{0,1\} \times [2,3]$.

(b) $\{0,1,5\} \times \{2,3\}$.

(c) $([0,2] \times [0,2]) \cap ([1,3] \times [1,3])$.

(d) $([-2,2] \times [-3,3]) \setminus ([0,1] \times [-1,0])$.

♣ **Exercice 4.6.** Soient E et F deux ensembles, et soient $A, B \subset E$ et $X, Y \subset F$ des sous-ensembles.

(a) Pour chacune des paires de sous-ensembles de $E \times F$ suivantes, déterminez quelles inclusions $\supset$, $\subset$, ou égalités sont vraies en général, et justifiez votre réponse :

1.	$(A \cup B) \times F$	$(A \times F) \cup (B \times F)$
2.	$(A \cup B) \times (X \cup Y)$	$(A \times X) \cup (B \times Y)$
3.	$(A \cup B) \times (X \cup Y)$	$(A \times X) \cup (A \times Y) \cup (B \times X) \cup (B \times Y)$
4.	$(A \cap B) \times F$	$(A \times F) \cap (B \times F)$
5.	$(A \cap B) \times (X \cap Y)$	$(A \times X) \cap (B \times Y)$

(b) Dans les cas 1, 2 et 3, représentez ces ensembles dans le plan $\mathbb{R}^2$, dans le cas où $A = X = [1,2] \subset \mathbb{R}$ et $B = Y = [3,4] \subset \mathbb{R}$.

► (c) Dans les cas 4 et 5, représentez ces ensembles dans le plan $\mathbb{R}^2$, dans le cas où $A = X = [1,3] \subset \mathbb{R}$ et $B = Y = [2,4] \subset \mathbb{R}$.

Exercice 4.7. On considère les sous-ensembles suivants d'un produit cartésien où, dans les quatre derniers exemples, A désigne un ensemble.

$$G_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ;\ y = x^2\}$$
$$G_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ;\ x^2 + y^2 = 1\}$$
$$G_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ;\ x = y^2\}$$
$$G_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\ ;\ x = y^2\}$$
$$G_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ ;\ x = 0\}$$
$$♣\ G_6 = \{(x,y) \in A \times P(A)\ ;\ x \in y\}$$
$$♣\ G_7 = \{(x,y) \in A \times P(A)\ ;\ y = \{x\}\}$$
$$♣\ G_8 = \{(x,y) \in A \times P(A)\ ;\ y = \emptyset\}$$
$$♣\ G_9 = \{(x,y) \in P(A) \times P(A)\ ;\ y = A \setminus x\}$$

(a) Pour chacun de ces sous-ensembles, décidez s'il s'agit d'un graphe ou non, et justifiez votre réponse.

(b) S'il s'agit d'un graphe, écrivez l'application à la quelle il correspond sous la forme $f : E \to F, x \mapsto f(x)$, et donnez, lorsque c'est possible, une formule pour $f(x)$.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES FACULTATIFS

♠ **Exercice 4.8.** Soient E et F deux ensembles, et soient $A \subset E$ et $B \subset F$ des sous-ensembles.

(a) Déterminer quelles inclusions sont vraies (en justifiant) entre les ensembles $(E \setminus A) \times (F \setminus B)$ et $(E \times F) \setminus (A \times B)$.

(b) Représenter ces deux ensembles dans le plan $\mathbb{R}^2$ dans le cas où $E = [-2,2]$, $F = [-3,3]$, $A = [0,1]$, $B = [-1,0]$.

(c) Dans le cas général démontrer que $(E \times F) \setminus (A \times B) = ((E \setminus A) \times F) \cup (E \times (F \setminus B))$.

♠ **Exercice 4.9.** Montrez les assertions suivantes par disjonction :

(a) Si $n \in \mathbb{Z}$, alors $n(n+3)$ est pair.

(b) Si $n \in \mathbb{N}$, alors $2n(3n+1)$ est divisible par 4.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \geqslant 2$, on a $x^2 - 1 \geq 3$.

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

(e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^4 = 16$, on a $(x+2)(x-2) = 0$.

(f) Si $n \in \mathbb{N}$ n'est pas divisible par 3, alors $(n-2)(n+2)$ est divisible par 3.

♠ **Exercice 4.10.** On considère les propositions suivantes.
(a) Pour tout entier naturel, on peut trouver un entier pair plus grand que lui qui le divise.
(b) Il existe un réel négatif dont le cube vaut -8.
(c) Étant donné deux entiers relatifs quelconques, il en existe un plus grand que l'autre.
(d) Il existe un entier naturel égal à la somme de deux autres entiers naturels.
(e) Il existe un entier naturel n plus grand ou égal à 12 qui est pair
(f) Tout entier naturel plus petit ou égal à 3 est premier.
(g) Pour tout réel x positif ou nul et plus petit que 10, on a $x^3 \leqslant 1000$.

Pour chacune de ces propositions,
(i) la formuler en symboles mathématiques ;
(ii) déterminez si elle est vraie ou fausse et le démontrer ;
(iii) donnez la négation en formule ;
(iv) reformulez la négation en français.

♠ **Exercice 4.11.** Soient

$$A = \{n \in \mathbb{N}\,;\, n \text{ impair}\} \quad \text{et} \quad B = \{n \in \mathbb{N}\,;\, (\exists m \in \mathbb{N}, n^2 = 2m)\}\,.$$

Écrivez en français et comprenez la signification des propositions suivantes. Décidez si elles sont vraies ou fausses, et justifiez-le.

$$\begin{aligned}
&Q_1 : (\exists n \in B\,,\ n \in A)\\
&Q_2 : (\forall n \in \mathbb{N}\,,\ n \in B)\\
&Q_3 : A = B\\
&Q_4 : \forall n \in A\,, \Big((\exists m \in \mathbb{N}\,, m = 6n\Big)\\
&Q_5 : \Big(\forall n \in \mathbb{N}, \big((n \in A) \Rightarrow \neg(n+5 \in B)\big)\Big)
\end{aligned}$$

♠ **Exercice 4.12.** Démontrez par l'absurde les propositions suivantes :
(a) Il existe un entier strictement plus grand que 10.
(b) Soient m, n des entiers relatifs non-nuls. Si m ne divise pas n, alors $\dfrac{n}{m^2} \notin \mathbb{Z}$.
(c) Soient $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \smallsetminus \{0\}$.
  (1) Si $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 > 100$, alors il existe $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ tel que $x_i > 5$.
  (2) Si $x_0 x_1 x_2 x_3 < 0$ alors il y a un nombre impair des x_i qui sont négatifs.
(d) Soit $i > 1$ et $n_1, \dots, n_i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$. On suppose que $\sum_{j=1}^{i} (n_j - 1) = 0$. Démontrer que

$$n_1 = n_2 = \cdots = n_i = 1.$$

FEUILLE 5

Exercice 5.1. Pour chacune des applications obtenues à l'Exercice 4.7, décidez si elle est injective ou non, surjective ou non, bijective ou non.

Exercice 5.2. On considère les sous-ensembles $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 2\}$ et $G = \{1, 2, 3, 4\}$.
(a) Donnez explicitement toutes les bijections $E \to E$.
(b) Existe-t-il des injections ou des surjections $E \to F$?
(c) Existe-t-il des injections ou des surjections $E \to G$?

Exercice 5.3. Soit $f : E \to F$ une application. On définit le sous-ensemble $\mathrm{Im}(f) \subset F$, *l'image de* f, par

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F\ ;\ \big(\exists x \in E, y = f(x)\big)\}\,.$$

Si $y \in F$, on appelle *antécédent de* y tout élément $x \in E$ avec $f(x) = y$.

(1) Énoncez en formule, avec les quantificateurs nécessaires, les proposition suivantes :
  (a) f n'est pas surjective.
  (b) f n'est pas injective.
  (c) f n'est pas bijective.
(2) Montrez que f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
(3) Montrez que f est injective si tout $y \in F$ admet au plus un antécédent.
(4) Montrez que f est bijective si tout $y \in F$ admet exactement un antécédent.

Exercice 5.4. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 2n & \text{si } n > 0 \\ -2n-1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

(a) Calculer $f(n)$ pour $n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
(b) Déterminer les antécédents éventuels de 11 par f.
(c) Soit m un entier naturel. Déterminer les antécédents éventuels de m par f. (On pourra distinguer des cas).
(d) L'application f est-elle bijective ?

♣ **Exercice 5.5.** Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie par :

$$f(k) = \begin{cases} \sqrt{k} & \text{si } \sqrt{k} \text{ est entier,} \\ k & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Calculer les valeurs de $f(k)$ pour k entier entre 0 et 10 inclus.
(b) Déterminer les antécédents de 4.
(c) L'application f est-elle injective ?
(d) L'application f est-elle surjective ?
(e) Pour tout entier naturel k déterminez les antécédents de k.

Exercice 5.6. Soit f une application d'un ensemble X dans un ensemble Y, et soit $A \subseteq X$.
(a) Montrer que si f est injective, alors $f|_A$ est injective.
(b) Donner un exemple où f est surjective mais $f|_A$ ne l'est pas.

► **Exercice 5.7.** On considère les applications suivantes :

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\,,\ x \mapsto x + 1 \quad \text{et} \quad g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\,,\ y \mapsto \begin{cases} y - 1 & \text{si } y \geq 1\,, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Déterminez si f et g sont injectives, surjectives, et/ou bijectives.
(b) Décrire les applications $f \circ g$ et $g \circ f$.
(c) Déterminez si $f \circ g$ et $g \circ f$ sont injectives, surjectives, et/ou bijectives. Que concluez-vous ?

♣ **Exercice 5.8.** Soit E un ensemble, et A, B deux sous-ensembles de E. On considère l'application

$$f : P(E) \to P(A) \times P(B) \quad X \mapsto (A \cap X, B \cap X)\,.$$

(a) Démontrez que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
(b) Démontrez que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
(c) Sous quelle condition f est-elle bijective ?

Exercice 5.9. Soit E un ensemble. L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'il n'existe pas d'application surjective $E \to P(E)$. Pour cela, soit $f : E \to P(E)$ une application, et soit

$$A = \{z \in E\,;\, z \notin f(z)\}\,.$$

Montrez par l'absurde que quelque soit $x \in E$, $f(x) \neq A$.

Exercice 5.10. Soit $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \subset \mathbb{N}$. Pour chacune des applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ suivantes, donnez $f(A)$ et $f^{-1}(A)$ explicitement, puis déterminez si l'application f est injective, surjective, bijective. Si elle est bijective, donnez sa réciproque.

(1) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \ n \mapsto \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 2n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

(2) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \ n \mapsto \begin{cases} 2n & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

► (3) $f_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \ n \mapsto \begin{cases} n+1 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ n-1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

► (4) $f_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ \ n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ (n-1)/2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Exercices supplémentaires facultatifs

♠ **Exercice 5.11.** Soient E et F des ensembles, et soient A et B deux sous-ensembles de E. On suppose que F contient au moins deux éléments distincts. On désigne par $\mathcal{F}(E, F)$ (resp. $\mathcal{F}(A, F)$, resp. $\mathcal{F}(B, F)$) l'ensemble des applications de E dans F (resp. l'ensemble des applications de A dans F, resp. l'ensemble des applications de B dans F). On définit l'application

$$\Phi : \mathcal{F}(E, F) \to \mathcal{F}(A, F) \times \mathcal{F}(B, F) \quad f \mapsto (f_{|A}, f_{|B})\,.$$

(a) À quelle condition l'application Φ est-elle injective ?
(b) À quelle condition l'application Φ est-elle surjective ?
(c) À quelle condition l'application Φ est-elle bijective ?

♠ **Exercice 5.12.**
(a) Donnez explicitement une application injective de $\{0, 1\}$ dans $\{0, 1, 2\}$. Représenter son graphe.
(b) Donnez explicitement une application surjective de $\{0, 1, 2\}$ dans $\{0, 1\}$. Représenter son graphe.
(c) On pose $E = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ et $F = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1\}$.
  (1) Donnez explicitement une application injective de E dans F.
  (2) Donnez explicitement une application surjective de F dans E.
  (3) L'application suivante $f : E \to F,\ (a, b) \mapsto (a + b, ab)$ est-elle injective , surjective ? Justifier.
  (4) L'application suivante $g : F \to E,\ (a, b) \mapsto (|a - 1|, |b - 1|)$ est-elle injective , surjective ? Justifier.

♠ **Exercice 5.13.** Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ l'application définie par : $f(n, m) = nm$.
(a) Déterminer l'image par f de $\mathbb{N} \times \{0\}$, puis de $\mathbb{N} \times \{1\}$.
(b) Déterminer les antécédents de 0, puis de 6.
(c) L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

♠ **Exercice 5.14.** On considère les sous-ensembles suivants du plan $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ y^2 - x^2 = 0\}\\
H_1' &= \{(x,y) \in \mathbb{R}_-\times\mathbb{R}_+\ ;\ y^2 - x^2 = 0\}\\
H_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ x = 2\}\\
H_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ |x| + |y| = 1\}\\
H_3' &= \{(x,y) \in \mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_-\ ;\ |x| + |y| = 1\}\\
H_4 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ x^2 - y^3 = 0\}\\
H_5 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ ;\ x^2 - e^y = 0\}.
\end{aligned}$$

(a) Représenter ces ensembles dans le plan $\mathbb{R}^2$.
(b) Pour chacun de ces sous-ensembles, décidez s'il s'agit d'un graphe ou non, et justifiez votre réponse.
(c) S'il s'agit d'un graphe, écrivez l'application à laquelle il correspond sous la forme $f : E \to F$, $x \mapsto f(x)$, et donnez, lorsque c'est possible, une formule pour $f(x)$.
(d) Pour chacune des applications obtenues, décidez si elle est injective ou non, surjective ou non, bijective ou non.

♠ **Exercice 5.15.** Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $f(x,y) = x + y - 1$.
(a) Déterminer l'image par f de $\mathbb{R}\times\{0\}$, puis de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x = y\}$, puis de $[0,1]\times[0,1]$.
(b) Déterminer les antécédents de 0, puis représenter cet ensemble dans le plan $\mathbb{R}^2$.
(c) L'application f est-elle injective ?
(d) L'application f est-elle surjective ?
(e) Pour tout réel a déterminer les antécédents de a, puis représenter cet ensemble dans le plan $\mathbb{R}^2$.

FEUILLE 6

Exercice 6.1. Considérons l'ensemble $E = \{1,2,3,4\}$. On définit l'application :

$$f\colon P(E) \to P(E) \quad A \mapsto A \cup \{1\}\,.$$

(a) Déterminer $f(\emptyset), f(\{2\}), f(\{1,3\}), f(\{1,2,3,4\})$.
(b) Quels sont les antécédents de $\{1,2\}$ par l'application f ?
(c) Quels sont les antécédents de $\{2\}$ par l'application f ?
(d) L'application f est-elle injective ?
(e) L'application f est-elle surjective ?
(f) Montrer que $f \circ f = f$.

Exercice 6.2. On considère la fonction $f\ :\ \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ définie par l'expression

$$f(x) := \frac{2x+1}{x-3}\,.$$

(a) La fonction f est-elle injective ? Est-elle surjective ?
(b) Déterminer le nombre réel α tel que la restriction au but $g\ :\mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}\setminus\{\alpha\}$ de f soit bijective.
► (c) Décrire la fonction réciproque g^{-1} de la fonction g.

Exercice 6.3. (a) Démontrer que la fonction réciproque d'une fonction impaire bijective $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire.
(b) Que peut-on dire pour une fonction paire ?

Exercice 6.4. Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ des applications. Compléter et démontrer les assertions suivantes :
(a) Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est . . . ;
(b) Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est . . . ;
► (c) Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est . . ..

♣ **Exercice 6.5.** On considère les applications

$$\begin{aligned} f\colon [-1,+\infty[&\to [0,1[\\ x &\mapsto \frac{x+2}{x+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g\colon [0,1[&\to [-1,+\infty[\\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \frac{3x-2}{-x+1} & \text{si } \frac{1}{2} \le x < 1\,. \end{cases} \end{aligned}$$

(a) Déterminer $f([-1,+\infty[)$.
(b) Montrer que $g \circ f = \mathrm{id}_{[-1,+\infty[}$.
(c) A-t-on $f \circ g = \mathrm{id}_{[0,1[}$? Commenter.

Exercice 6.6. Soit $f\colon E \to F$ une application, et $A_1, A_2 \subset E$ et $B_1, B_2 \subset F$ des sous-ensembles. Démontrez les affirmations suivantes ; dans les cas où une inclusion $\subset$ est indiquée, c'est que l'inclusion $\supset$ (donc l'égalité) n'est pas vraie en général : pour ces cas-là donnez un contre-exemple montrant qu'il n'y a pas égalité.

(a) $(A_1 \subset A_2) \Rightarrow \big(f(A_1) \subset f(A_2)\big)$.
(b) $(B_1 \subset B_2) \Rightarrow \big(f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)\big)$.
(c) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.
(d) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.
(e) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.
► (f) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.
► (g) $A_1 \subset f^{-1}\big(f(A_1)\big)$.
► (h) $f\big(f^{-1}(B_1)\big) \subset B_1$.

♣ **Exercice 6.7.** Soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to E$ des applications.
(a) On suppose seulement $g \circ f = \mathrm{id}_E$; f est-elle bijective ? Si oui, démontrez-le, sinon trouvez un contre-exemple.
(b) On suppose seulement $f \circ g = \mathrm{id}_F$; f est-elle bijective ? Si oui, démontrez-le, sinon trouvez un contre-exemple.

Exercice 6.8. Soient $f\colon E \to F$, $g_1, g_2\colon F \to G$ et $h\colon G \to H$ des applications.
(a) On suppose h injective et $h \circ g_1 = h \circ g_2$. Prouvez que $g_1 = g_2$.
► (b) On suppose f surjective et $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Prouvez que $g_1 = g_2$.

♣ **Exercice 6.9.** Sur $\mathbb{N}^*$ on définit la relation R par

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \ \ a\mathrm{R}b \Leftrightarrow a \text{ divise } b\,.$$

(a) Montrer que la relation R définit une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
(b) Est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice 6.10. Soit $f : E \to F$ une application.
(a) Démontrez que les assertions suivantes sont équivalentes :
  (i) L'application f est injective.
  (ii) Pour tout sous-ensemble X de E, $f^{-1}(f(X)) = X$.
► (b) Démontrez que les assertions suivantes sont équivalentes :
  (i) L'application f est surjective.
  (ii) Pour tout sous-ensemble Y de F, $f(f^{-1}(Y)) = Y$.

Exercice 6.11. Déterminez si les relations suivantes sur E sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives.
(a) $E = \mathbb{Z}$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $x\mathrm{R}y \Leftrightarrow x = -y$;
(b) $E = \mathbb{R}$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x\mathrm{R}y \Leftrightarrow x < y$;
► (c) $E = \mathbb{R}$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $x\mathrm{R}y \Leftrightarrow |x| \leqslant |y|$.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES FACULTATIFS

♠ **Exercice 6.12.** Les applications suivantes sont-elles injectve, surjectives, bijectives ?

$$f : P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{N}) \,, \quad f(A) = \mathbb{N} \smallsetminus A \,;$$
$$g : \mathbb{R} \smallsetminus \{1\} \to \mathbb{R} \,, \quad g(x) = \frac{x+1}{x-1} \,;$$
$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,, \quad h(x,y) = (x+y, x-y) \,;$$
$$k : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \,, \quad k(x) = x+2 \,.$$

♠ **Exercice 6.13.** Dans tous les cas suivants, déterminer si l'application considérée est injective, surjective, bijective. Si elle bijective, déterminer son application réciproque.

Soit E un ensemble et soit $B \subset E$.

(a) $f_1 \colon P(E) \to P(E)$, $A \mapsto E \backslash A$, où $E \backslash A$ est le complémentaire de A dans E.
(b) $f_2 \colon P(E) \to P(B)$, $A \mapsto A \cap B$.
(c) $f_3 \colon P(B) \to P(E)$, $A \mapsto A$.
(d) $f_2 \circ f_3$.

♠ **Exercice 6.14.** On considère la fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x^2 - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(a) La fonction f est-elle injective ?
(b) Déterminer un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ tel que la fonction $g = f|_A \; A \to \mathbb{R}$ soit injective.
(c) La fonction g est-elle surjective ?
(d) Déterminer un ensemble $B \subset \mathbb{R}$ tel que la fonction $h : A \to B$ définie par l'expression $h(x) := 2x^2 - 1$ soit surjective.

♠ **Exercice 6.15.** Soient $f \colon E \to F$ et $g \colon F \to G$ deux applications. Démontrer les assertions suivantes :

(a) Si $g \circ f$ est injective alors f est injective ;
(b) Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.
(c) Que peut-on dire si $g \circ f$ est bijective ?

♠ **Exercice 6.16.** Soit f l'application $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $(p,q) \mapsto p + \frac{1}{q}$.

(a) Montrer que f est injective.
(b) Montrer que f n'est pas surjective.
(c) Soit g l'application $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to f(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*)$, $(p,q) \mapsto f(p,q)$. Justifier que g est bijective, puis déterminer l'application réciproque g^{-1}.

FEUILLE 7

Exercice 7.1. Écrire à l'aide du symbole de somme ou du symbole de produit les réels les expressions suivantes.

$$A = 5+6+7+8+9+10$$
$$B = 1+3+5+7+9+11+13+15$$
$$C = -N + (-N+1) + \ldots + (-1) + 0 + 1 + 2 + \ldots + (N-1) + N, \quad \text{où } N \in \mathbb{N}^*$$
$$D = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2(N-1) \cdot 2N, \quad \text{où } N \in \mathbb{N}^*.$$

Donner aussi une écriture du nombre D en utilisant la notation factorielle.

Exercice 7.2. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Compléter les indices dans les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{i=\ldots}^{\ldots} (n-i) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{100} i = \sum_{k=\ldots}^{\ldots} k + \sum_{\ell=\ldots}^{\ldots} \ell.$$

Remarque : Pour la deuxième égalité, il y a beaucoup de solutions possibles.

Exercice 7.3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note $S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5.
Quelle formule générale ces résultats suggèrent-ils ? Prouver cette formule.

Exercice 7.4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 3 divise $n^3 + 2n$.

Exercice 7.5. On définit la suite u_n par $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
En calculant les premiers termes, conjecturer une formule de u_n et la prouver.

♣ **Exercice 7.6.** On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 3$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

Conjecturer une formule donnant u_n en fonction de n puis la démontrer par récurrence.

Exercice 7.7. Montrez par récurrence que les formules suivantes sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$.

► (b) $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

► (c) $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

(d) Si $x \in \mathbb{R}$ et $x \neq 1$, alors $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

Exercice 7.8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 1$, on a l'égalité

$$\prod_{k=1}^{n}(4k-2) = \prod_{k=1}^{n}(n+k)\,.$$

♣ **Exercice 7.9.** On considère l'ensemble $\mathbb{N}$, et $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application "successeur", dont nous avons vu en cours qu'elle correspond à $s(n) = n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrez par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ les affirmations suivantes portant sur les éléments de $\mathbb{N}$, à partir des définitions et de l'associativité de $+$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 + n = n = n + 0$.

(b) Pour tous a et $n \in \mathbb{N}$, on a $s(a) + n = s(a + n)$.

(c) Pour tout m et $n \in \mathbb{N}$, on a $n + m = m + n$.

Exercice 7.10. Sur $\mathbb{Z}^2$, on définit la relation R par

$$(\lambda_1, \lambda_2)\mathrm{R}(\mu_1, \mu_2) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 < \mu_1 \text{ ou } (\lambda_1 = \mu_1 \text{ et } \lambda_2 \leq \mu_2)$$

pour tous $\big((\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2)\big) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$.

(a) Montrer que la relation R définit une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^2$.

(b) Est-ce une relation d'ordre total ?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES FACULTATIFS

♠ **Exercice 7.11.** Démontrez que dans $\mathbb{N}$, il n'existe aucune suite strictement décroissante.

♠ **Exercice 7.12.** Sur $\mathbb{Z}^2$, on définit la relation R par

$$(\lambda_1, \lambda_2)\mathrm{R}(\mu_1, \mu_2) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_1 \leq \mu_1 \text{ et } \lambda_1 + \lambda_2 = \mu_1 + \mu_2$$

pour tous $\big((\lambda_1, \lambda_2), (\mu_1, \mu_2)\big) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$.

(a) Montrer que la relation R définit une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^2$.

(b) Est-ce une relation d'ordre total ?

♠ **Exercice 7.13.** Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Sur $\mathbb{Z}^n$, on définit la relation R par

$$(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}\mathrm{R}(\mu_i)_{i=1,\dots,n} \quad\Leftrightarrow\quad \forall j\in\{1,\dots,n-1\}\ \sum_{i=1}^{j}\lambda_i \le \sum_{i=1}^{j}\mu_i \text{ et } \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}\mu_i$$

pour tous $\big((\lambda_i)_{i=1,\dots,n},(\mu_i)_{i=1,\dots,n}\big)\in\mathbb{Z}^n\times\mathbb{Z}^n$. Montrer que la relation R définit une relation d'ordre sur $\mathbb{Z}^n$.

♠ **Exercice 7.14.** Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, 6 divise n^3-n. Est-il indispensable de passer par une récurrence ?

FEUILLE 8

Exercice 8.1. Soit m, n et p des entiers naturels.
(a) À l'aide d'une récurrence sur p, montrez que $(m+p=n+p)\Leftrightarrow(m=n)$ (cette règle s'appelle *simplification pour l'addition dans* $\mathbb{N}$).
(b) Déduisez-en la relation $(m+p\le n+p)\Leftrightarrow(m\le n)$.

► **Exercice 8.2.** Soit $\mathcal{P}$ la propriété portant sur les éléments $n\in\mathbb{N}$ définie par $\mathcal{P}(n)$: 9 divise 10^n-1.
(a) Cette propriété est-elle vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$?
(b) Raisonner de même avec la propriété $Q(n)$: $(b-1)|(b^n-1)$, où $b\ge 3$ est un entier fixé.

Exercice 8.3. Soient m et $n\in\mathbb{N}^*$ donnés. On rappelle la notation $[[m]]=\{k\in\mathbb{N}\,;\ 1\le k\le m\}\subset\mathbb{N}$. Démontrez que les propriétés suivantes sur m et n sont équivalentes :
(a) On a $m\ge n$.
(b) Il existe une surjection $[[m]]\to[[n]]$.
(Comparez avec la Proposition 8.2 du cours.)

Exercice 8.4. Soient k et $\ell\in\mathbb{N}$ fixés. Montrez que chacun des ensembles ci-dessous est fini et calculez son cardinal en donnant une bijection explicite avec un ensemble de la forme $[[m]]\subset\mathbb{N}$ (vous devrez peut-être distinguez des cas) :

$$A=\{n\in\mathbb{N}\ :\ k\le n\le\ell\}$$
$$B=\{n\in\mathbb{N}\ :\ n\le\ell\ \text{ et }\ 2|n\}$$
$$►\ C=[[k]]\times[[1]]$$
$$►\ D=[[k]]\times[[2]]$$
$$E=\mathcal{F}([[1]],[[k]])$$
$$F=\mathcal{F}([[2]],[[3]])\,.$$

♣ **Exercice 8.5.** Calculer $\sum_{i=1}^{n} i$ et $\Pi_{i=1}^{n}\exp i$. En déduire une bijection entre $\mathbb{N}^p$ et l'ensemble des matrices $n\times n$ symétriques à coefficients entiers (soit encore des tableaux de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots. & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots. & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots. & a_{nn}\end{pmatrix}$$

avec $a_{ij}=a_{ji}, 1\le i,j\le n,\ a_{ij}\in\mathbb{N}$) pour un p que l'on déterminera.

Exercice 8.6. Soit n un entier naturel. Calculer le cardinal des ensembles suivants, en précisant la bijection avec un ensemble de la forme $[[p]]$.

$$E=\{m\in\mathbb{N}\,;\ m\le n\}$$
$$F=\{m\in\mathbb{Z}\,;\ -n\le m\le 2n\}$$
$$G=\{m\in\mathbb{N}\,;\ m\le n\ \text{ et }\ m \text{ est pair}\}$$

Pour l'ensemble G, on pourra faire deux cas suivant la parité de n.

Exercice 8.7. Supposons données trois applications $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Montrez que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives, alors f, g et h sont toutes trois bijectives.

Exercice 8.8. Soit $f : E \to E$ une application. Montrez que les conditions suivantes sont équivalentes.
(a) L'application f est bijective.
(b) Pour tout $A \subset E$ on a $f(E \setminus A) = E \setminus f(A)$.

Exercice 8.9. Montrer que pour tous m et n entiers strictement positifs et r entier, le nombre $m^{2r+1} + n^{2r+1}$ est divisible par $m + n$.

Exercice 8.10. La proposition ci-dessous est-elle vraie, la démonstration donnée est-elle correcte ? Si oui, pourquoi ? Sinon, pourquoi ?

Proposition : *Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, et soient $A_1, \ldots, A_n$ des points du plan deux-à-deux disticts. Alors les points $A_1, \ldots, A_n$ sont alignés.*

Démonstration : Pour tout $n \geqslant 2$, on considère la propriété $P(n)$: n points distincts du plan sont alignés.
- Initialisation : $P(2)$ est vraie car deux points distincts sont toujours alignés.
- Hérédité : Soit n fixé supérieur ou égal à 2. On suppose que $P(n)$ est vraie et on va démontrer $P(n+1)$. Soit donc $A_1, \ldots, A_{n+1}$ des points distincts. Les points $A_1, \ldots, A_n$ sont alignés sur une droite (D) d'après l'hypothèse $P(n)$. Les points $A_2, \ldots, A_{n+1}$ sont aussi alignés sur une droite (D'). Les deux droites (D) et (D') ont $n - 1$ points en communs $A_2, \ldots, A_n$. Donc $A_1, \ldots, A_{n+1}$ sont alignés, ce qui montre l'hérédité de la propriété.
- Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

♣ **Exercice 8.11.** Montrer que les deux ensembles $\mathbb{N}$ and $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ont le même cardinal en exhibant une bijection explicite.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES FACULTATIFS

♠ **Exercice 8.12.** (a) Soit $f : E \to F$ une application. Soit R la relation sur E définie par
$$a\mathrm{R}b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$
pour tout $(a, b) \in E^2$. Montrer que R est une relation d'équivalence sur E.
(b) Dans chacun des cas suivants, justifier que R est une relation d'équivalence, décrire géométriquement (et dessiner) l'ensemble des classes d'équivalence, et donner un système de représentants de ces classes.
(i) $\forall\big((x, y), (x', y')\big) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2,\ (x, y)\mathrm{R}(x', y') \Leftrightarrow y = y'$.
(ii) $\forall(z, z') \in \mathbb{C}^2,\ z\mathrm{R}z' \Leftrightarrow |z| = |z'|$.
(iii) $\forall(z, z') \in (\mathbb{C}^*)^2,\ z\mathrm{R}z' \Leftrightarrow \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(z')$.

♠ **Exercice 8.13.** Peut-on définir une application constante sur l'ensemble vide ?

♠ **Exercice 8.14.** Soient E et F deux ensembles finis. On définit $E\Delta F := (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$. Quel est son cardinal en fonction de $\mathrm{card}(E), \mathrm{card}(F), \mathrm{card}(E \cap F)$?

FEUILLE 9

Exercice 9.1. Parmi les nombres entiers s'écrivant avec trois chiffres :
(a) Combien en y a-t-il qui s'écrivent avec trois chiffres identiques ?
(b) Combien en y a-t-il qui s'écrivent avec trois chiffres différents ?
(c) Combien en y a-t-il qui s'écrivent avec exactement deux chiffres différents ?
(d) Quels ensembles de départ et d'arrivée prendre et quel type d'application utiliser (injection, surjection, autre), pour modéliser chacune des questions précédentes ?

Rappel : Dans un nombre de 3 chiffres, il est nécessaire que le premier chiffre ne soit pas un zéro.

Exercice 9.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dénombrer les applications non injectives de $[[n]] \to [[n+1]]$.

Exercice 9.3. (a) De combien de manières distinctes peut-on diviser une classe de 12 élèves en deux groupes, l'un de 5 élèves, l'autre de 7 élèves ?
(b) De combien de manières distinctes peut-on diviser une classe de 12 élèves en deux groupes de 6 élèves ?

Exercice 9.4. Démontrer par récurrence sur n la formule suivante, où n et p sont des entiers naturels vérifiant $n \geq p$:

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} .$$

Exercice 9.5. On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.
Pour un entier naturel n, on appelle un chemin de longueur n une suite de n segments de longueur un, soit horizontalement vers la droite, soit verticalement vers le haut.
(a) Combien de chemins de longueur n partant de $O(0,0)$ y a-t-il ? Quel est l'ensemble E de leurs extrémités ? Que vaut $\mathrm{card}(E)$?
(b) Pour un point M de coordonnées (p,q) (où p et q sont entiers naturels), combien de chemins différents relient l'origine à M ?

► **Exercice 9.6.** Développer $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, $(a+b)^4$, $(a-b)^4$ et $(a+b)^5$ en utilisant le triangle de Pascal pour calculer explicitement les coefficients.

Exercice 9.7. Démontrer par récurrence sur p la formule suivante, où n et p sont des entiers naturels

$$\binom{n+p+1}{n+1} = \sum_{k=0}^{p} \binom{n+k}{n} .$$

Exercice 9.8. Démontrer (sans récurrence) les relations suivantes pour $n \geqslant 0$, $p \geqslant 0$ et $q \geqslant 0$:

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} \quad \text{et} \quad \binom{n+p}{q} = \sum_{k=0}^{q} \binom{n}{k} \cdot \binom{p}{q-k} .$$

Indications. Pour la première relation, on comptera le nombre de choix de $p+1$ éléments parmi $[[n+1]]$, en imposant d'abord de prendre 1, puis en imposant de prendre 2 sans prendre 1, etc. Pour la seconde relation, on raisonnera sur un ensemble à $n+p$ éléments.

Exercice 9.9. Dénombrer les bijections f de $[[8]] \to [[8]]$ satisfaisant :
(a) la condition : Si n est pair, alors $f(n)$ est pair.
(b) la condition : Si n est divisible par 3, alors $f(n)$ est divisible par 3.
(c) les deux conditions ci-dessus à la fois.

♣ **Exercice 9.10.** Reprendre l'exercice ci-dessus en remplaçant "bijections" par "applications".

Exercice 9.11. Dans un jeux de cartes traditionnel à 52 cartes, combien y a-t-il de mains contenant chacune des combinaisons suivantes ?
(a) Un brelan (3 cartes de même hauteur).
(b) Un carré (4 cartes de même hauteur).
(c) Une couleur (5 cartes de même couleur).
► (d) Une quinte (5 cartes dont les hauteurs forment une suite).
► (e) Une quinte flush (une quinte et une couleur).

♣ **Exercice 9.12.** Soient p et n des entiers naturels. Le but de cet exercice est de dénombrer les surjections $E \to F$, où $\mathrm{card}(E) = p$ et $\mathrm{card}(F) = n$. Notons

$$S_n^p := \mathrm{card}\{f \in \mathcal{F}(E,F)\,;\ f \text{ est surjective}\}\,.$$

(a) Si X est un ensemble fini, posons $\alpha(X) = \sum_{A\subset X}(-1)^{\mathrm{card}(A)}$. Montrer que

$$\alpha(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } X = \emptyset, \\ 0 & \text{si } X \neq \emptyset. \end{cases}$$

Indication. Utilisez la formule du binôme de Newton.

(b) Si $f \in \mathcal{F}(E,F)$, posons $\beta(f) = \alpha\big(F \setminus f(E)\big)$. Montrer que

$$S_n^p = \sum_{f\in\mathcal{F}(E,F)} \beta(f)\,.$$

(c) Montrez que pour $f \in \mathcal{F}(E,F)$, on a $P\big(F \setminus f(E)\big) = \{A \in P(F)\,;\ f(E) \subset F \setminus A\}$.

(d) En repartant de (b) en remplaçant $\beta(f)$ par la somme qui le définit, déduisez-en que

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,(n-k)^p(-1)^k\,,$$

ce qui démontre la Proposition 9.21 du cours.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES FACULTATIFS

♠ **Exercice 9.13.** Soit E un ensemble fini non vide à n éléments et A un sous-ensemble de E à p éléments.

(a) Combien y a-t-il d'applications $f : E \to E$ tel que l'image directe de A par f soit incluse dans A ?

(b) Combien y a-t-il d'applications $f : E \to E$ tel que tout élément de A soit dans l'image de A par f ?

♠ **Exercice 9.14.** Soit E un ensemble fini à n éléments et A un sous-ensemble de E à p éléments.

(a) Quel est le nombre de parties de E qui contiennent un et un seul élément de A ?

(b) Quel est le nombre de parties de E qui contiennent exactement deux éléments de A ?

♠ **Exercice 9.15.** Soit n dans $\mathbb{N}^*$. En écrivant de deux façons différentes la dérivée de l'application $x \mapsto (1+x)^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

♠ **Exercice 9.16.** Dénombrer les surjections d'un ensemble à $n+1$ éléments dans un ensemble à n éléments.

♠ **Exercice 9.17.** Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Dénombrer l'ensemble $F = \{(A,B) \in P(E) \times P(E), A \subseteq B\}$.
Indication. On pourra commencer avec $E = \{1\}$ puis $E = \{1;2\}$, et on n'oubliera pas les cas où A ou B sont l'ensemble vide.

FEUILLE 10

Exercice 10.1. On définit une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$v_{n+1} = v_0 + \cdots + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k\,.$$

Montrez par récurrence forte que pour tout $n \geq 1$, on a $v_n = 2^{n-1}$.
Indication : On pourra utiliser l'Exercice 7.7.(d).

Exercice 10.2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n(1 + u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
(2) Montrer que tous les termes de cette suite sont des entiers naturels non nuls.
(3) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1} = (1 + u_1) \times \ldots \times (1 + u_n) = \prod_{k=1}^{n} (1 + u_k).$$

On se place, pour les deux dernières questions de l'exercice, dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

(4) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{1 + u_1} + \ldots + \frac{1}{1 + u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} = \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + u_k}\Big) + \frac{1}{u_{n+1}} = 1.$$

(5) En déduire une décomposition de l'unité comme somme des inverses de cinq entiers naturels non nuls deux à deux distincts.

► **Exercice 10.3.** On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}$ par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \geq 2$, $u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2}$. Montrez par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 1 + 2^n$.

♣ **Exercice 10.4.** Soit E ensemble. On reprend les notations et résultats des exercices 2.7 à 2.9. Montrez que l'opération binaire donnée par la différence symétrique

$$\Delta : P(E) \times P(E) \to P(E), \quad (A, B) \mapsto A\Delta B$$

munit $P(E)$ d'une structure de groupe abélien. Quel est son élément neutre ? À quelles propriétés correspondent les calculs fait à l'Exercice 2.7.(b) ?

♣ **Exercice 10.5.** On se réfère aux définitions sur $\mathbb{Z}$ donnée dans le cours.

(1) Montrez que l'aplication $i : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $i(n) = [(n, 0)]$ est injective.
(2) Montrez que i est compatible avec l'addition : $i(a + b) = i(a) + i(b)$ pour tous $a, b \in \mathbb{N}$.

Considérons la multiplication dans $\mathbb{Z}$ donnée à la Définition 10.20. En vous inspirant de la démonstration de la Proposition 10.18, démontrez les assertions suivantes :

(3) La multiplication donnée par la formule $[(a, b)][(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)]$ est bien définie.
(4) $[(1, 0)]$ est un élément neutre pour la multiplication.
(4) Montrez que $(-1)^2 = 1$, où on rappelle que $-1 = [(0, 1)]$.

Exercice 10.6. Montrez que la relation $\leq$ sur $\mathbb{Z}$ définie par $x \leq y \iff y - x \in \mathbb{N}$ est une relation d'ordre total, compatible avec l'ordre sur $\mathbb{N}$. S'agit-il d'un bon ordre ?

Exercice 10.7. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, et soit $E = P([[n]])$ l'ensemble des parties de $[[n]]$. On considère la relation R sur l'ensemble E définie par

$$A \sim B \iff \operatorname{card} A = \operatorname{card} B$$

pour tous $A, B \in P([[n]])$.

(1) Quel est le cardinal de E ?
(2) Montrez par récurrence sur n que $[[n]]$ contient $\frac{n(n-1)}{2}$ sous-ensembles de cardinal 2.
(3) Montrer que R est une relation d'équivalence.
(4) Quand $n = 4$, écrire en extension les sous-ensembles $C_{\{1\}}$ et $C_{\{1;2\}}$ de $[[n]]$.
(5) Pour $n \geq 2$, quel est le cardinal de $C_{\{1;2\}}$?
(6) Combien d'éléments y a-t-il dans $E/_{\mathrm{R}}$?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES FACULTATIFS

♠ **Exercice 10.8.** On se place dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, et on considère l'opération binaire $\star$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}, \quad \forall y \in \mathbb{Z}, \quad x \star y = x + y - xy.$$

(1) Cette opération est-elle associative ? Est-elle commutative ?
(2) Cette opération admet-elle un élément neutre ?
(3) Cette opération admet-elle un élément absorbant ?
(4) Quels sont les entiers relatifs qui admettent un inverse pour $\star$?
(5) Soit n un entier naturel. Donner une formule donnant la puissance n-ième d'un élément $x \in \mathbb{Z}$ pour cette opération.

♠ **Exercice 10.9.** On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{Z}$ par $u_0 = 1$, $u_1 = 4$ et $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En calculant les premiers termes, conjecturez une formule pour u_n et démontrez-la.

♠ **Exercice 10.10.** On s'intéresse, dans cet exercice, à l'ensemble E des triplets d'entiers naturels deux à deux distincts, rangés dans l'ordre croissant et de somme égale à 12 :

$$E = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{N}^3 \,;\, a_1 < a_2 < a_3 \text{ et } a_1 + a_2 + a_3 = 12\}.$$

(1) Soit (a_1, a_2, a_3) un triplet de E. Montrer que, nécessairement, $a_1 \leqslant 3$.
(2) Soit k un entier dans $\{0, 1, 2, 3\}$. Montrer que le triplet $(k, k + 1, 11 - 2k)$ est un élément de E.
(3) On définit sur E une relation binaire $\mathcal{R}$:

$$(a_1, a_2, a_3)\mathcal{R}(b_1, b_2, b_3) \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1$$

pour tous (a_1, a_2, a_3) et tous $(b_1, b_2, b_3) \in E$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E.
Combien l'ensemble E compte-t-il de classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$?
(4) Pour tout entier k dans $\{0, 1, 2, 3\}$, on note C_k la classe d'équivalence de l'élément $(k, k + 1, 11 - 2k)$. Montrer que la classe C_3 est un singleton.
Donner la liste des éléments de C_1.
(5) On dispose de douze friandises en chocolat, que l'on veut distribuer à trois enfants.
Combien y a-t-il de partages totalement injustes possibles ?
On considère qu'un partage est totalement injuste si chaque enfant reçoit un nombre de friandises différent des deux autres.

FEUILLE 11

Exercice 11.1. Donnez la liste des diviseurs de 36 dans $\mathbb{N}$ et dans $\mathbb{Z}$. Donnez la liste de toutes les factorisations possibles (à l'ordre près des facteurs) de 36 dans $\mathbb{N}$, en excluant le facteur 1. Laquelle de ces factorisations correspond à la factorisation en nombres premiers ?

Exercice 11.2. En utilisant l'égalité $512 \cdot 233 + 717 = 120013$, calculer de tête le quotient et le reste de la division euclidienne de 120013 par 233. Faire de même si on divise 120013 par 512.

Exercice 11.3. A l'aide de l'algorithme d'Euclide, calculez les pgcd suivants :

$$(24, 56)\,, \quad (490, 175)\,, \quad \blacktriangleright (308, 4004) \quad \text{et} \quad \blacktriangleright (1386, 546)\,.$$

Exercice 11.4. On souhaite démontrer qu'il existe dans $\mathbb{N}$ une infinité de nombres premiers. Démontrez cette assertion par l'absurde : supposons que l'ensemble des nombres premiers est fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$, et est formé des éléments $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Aboutissez à une contradiction en considérant la factorisation en nombres premiers du nombre $m = \left(\prod_{k=1}^{n} p_k\right) + 1$.

Exercice 11.5. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^*$. Décidez si les assertions suivantes sont vraies ou fausses, et justifiez vos réponses.

(a) Si a divise b et c, alors $c^2 - b^2$ est multiple de a.
(b) Si a est premier avec b, alors a est premier avec b^3.
(c) Si a divise $b + c$ et $b - c$, alors a divise b et a divise c.
(d) Si 19 divise ab, alors 19 divise a ou 19 divise b.
(e) Si a est multiple de b et si c est multiple de d, alors $a + c$ est multiple de $b + d$.
(f) Si 4 ne divise pas bc, alors b ou c est impair.
(g) Si a divise b et b ne divise pas c, alors a ne divise pas c.
(h) Si 5 divise b^2, alors 25 divise b^2.
(i) Si 12 divise b^2, alors 4 divise b.
(j) Si 12 divise b^2, alors 36 divise b^2.
(k) Si 91 divise ab et a divise b, alors 91 divise b.

Exercice 11.6. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, n et $n + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 11.7. Démontrez les critères de divisibilité suivant dans le système de notation décimal :

— Un nombre est divisible par 2 ssi le dernier chiffre représente un nombre divisible par 2.
— Un nombre est divisible par 3 ssi la "somme de ses chiffres" est divisible par 3.
— Un nombre est divisible par 4 ssi les deux derniers chiffres représentent un nombre divisible par 4.
— Un nombre est divisible par 5 ssi le dernier chiffre représente un nombre divisible par 5.
— Un nombre est divisible par 8 ssi les trois derniers chiffres représentent un nombre divisible par 8.
— Un nombre est divisible par 9 ssi la "somme de ses chiffres" est divisible par 9.
— Un nombre est divisible par 10 ssi son dernier chiffre est 0.

Exercice 11.8. On revient sur la construction de $\mathbb{Q}$ esquissée en cours.

(1) Démontrez que la relation R sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ définie dans le Lemme 11.2 du cours est bien une relation d'équivalence.
(2) Démontrez que l'addition de $\mathbb{Q}$ définie dans la Proposition 11.3 est bien associative.
(3) Vérifiez les points (a) et (b) de la Proposition 11.3.

Exercice 11.9. Montrez que si a et b sont des entiers naturels premiers entre eux, alors a^2 et b^2 sont aussi premiers entre eux. Déduisez-en qu'il n'existe pas de nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ avec $r^2 = 2$.
Indication : Procédez par l'absurde, en supposant que r s'écrit comme fraction réduite $r = \frac{a}{b}$.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES FACULTATIFS

♠ **Exercice 11.10.** Montrer que si deux entiers a et b sont premiers entre eux il en est de même pour ab et $a + b$.

♠ **Exercice 11.11.** Prouver la proposition suivante :
$\forall n > 2$, 60 divise $n^2(n^2 - 1)(n^4 - 16)$.

♠ **Exercice 11.12.** Montrer la proposition suivante : $(a, b) = 1 \implies log_b(a) \notin \mathbb{Q}$.

♠ **Exercice 11.13.** Prouver la proposition suivante :
$\forall n > 2$, 360 divise $n^2(n^2 - 1)(n^4 - 16)$.

♠ **Exercice 11.14.**

— Peut-on trouver trois entiers consécutifs dont la somme est 207 ?
— Peut-on trouver trois entiers consécutifs dont la somme est 329 ?
— Caractériser les entiers naturels qui sont la somme de trois entiers consécutifs.
— En déduire tous les nombres dont l'écriture en base 10 est 47d5 et qui sont la somme de trois entiers consécutifs.

♠ **Exercice 11.15.** Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ 3 divise $n^3 + 2n$.

♠ **Exercice 11.16.** On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers premiers.

Déterminer les ensembles suivants :

— $A_1 = \{n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathcal{P}, \exists k \in \mathbb{N}*, n = p^k$ et n possède exactement 12 diviseurs.$\}$.
— $A_2 = \{n \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \mathcal{P}, \exists k, r \in \mathbb{N}*, n = p^k q^r$ et n possède exactement 12 diviseurs.$\}$.
— $A_3 = \{n \in \mathbb{N}, \exists p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{P}, \exists k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}*, n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3}$ et n possède exactement 12 diviseurs.$\}$.
— $A_4 = \{n \in \mathbb{N}, \exists p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathcal{P}, \exists k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{N}*, n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} p_4^{k_4}$ et n possède exactement 12 diviseurs.$\}$.
— $A_5 = \{n \in \mathbb{N}, \exists p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in \mathcal{P}, \exists k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 \in \mathbb{N}*, n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{k_3} p_4^{k_4} p_5^{k_5}$ et n possède exactement 12 diviseurs.$\}$.
— ...

♠ **Exercice 11.17.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Quel est le reste dans la division euclidienne du nombre $7^n + 1$ par 8 ?

♠ **Exercice 11.18.** Montrer que $log_3(2) \notin \mathbb{Q}$.

♠ **Exercice 11.19.** Montrer que $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$.

♠ **Exercice 11.20.** Montrer que $\forall p \in \mathcal{P}, \sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

♠ **Exercice 11.21.** Dans un verger, un puits central a pour coordonnées cartésiennes (0,0). Les arbres occupent toutes les coordonnées (a,b) entières. Quels sont les arbres visibles depuis le puits ?

♠ **Exercice 11.22.** Trois cents personnes font la queue devant un bloc de 300 tiroirs fermés numérotés de 1 à 300 ;

— La première personne ouvre tous les tiroirs
— La deuxième personne ferme tous les tiroirs portant un numéro pair
— La troisième personne ouvre les tiroirs fermés portant un numéro divisible par 3 et ferme les tiroirs ouverts dont le numéro est divisible par 3
— La quatrième personne ouvre les tiroirs fermés portant un numéro divisible par 4 et ferme les tiroirs ouverts dont le numéro est divisible par 4
— la nième personne ouvre les tiroirs fermés portant un numéro divisible par n et ferme les tiroirs ouverts dont le numéro est divisible par n (n allant de 1 à $n = 300$)

A la fin de la manipulation

— Le tiroir $p = 21$ est-il ouvert ou fermé ?
— combien de fois a-t-il été ouvert ?
— Combien y-a-t-il de tiroirs ouverts et quels sont-ils ?
— généraliser pour un nombre n de tiroirs quelconques et pour un tiroir p quelconque.