Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 10*, 14.12.2007

Aufgabe 10.1. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, und sei $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ die Abbildung, die durch $f(X) = AX - XA$ definiert ist.

(a) Zeige, dass f $\mathbb{R}$-linear ist.
(b) Bestimme eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$.
(c) Wähle eine Basis B von $M_2(\mathbb{R})$, und berechne die Matrix $C_B(f)$ von f bezüglich der Basis B.

Definition. Seien K ein Körper und A eine K-Algebra mit Einheit 1. Eine Teilmenge $B \subset A$ ist eine *Unteralgebra* von A, falls B ein Teilraum von A mit $1 \in B$ ist, der unter dem Produkt in A abgeschlossen ist (also $vw \in B$ falls $v, w \in B$). Ein Algebra-Automorphismus von A ist ein Isomrphismus $f : A \to A$ von K-Vektorräumen, mit $f(1) = 1$ und $f(vw) = f(v)f(w)$ für alle $v, w \in A$.

Aufgabe 10.2. Entscheide, ob die folgenden Teilmengen der K-Algebra $M_n(K)$ Unteralgebren sind:

$$\begin{aligned} R &= \{(a_{ij}) \in M_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ falls } i + j \text{ ungerade ist}\}, \\ S &= \{(a_{ij}) \in M_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ falls } i = j\}, \\ T &= \{(a_{ij}) \in M_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ falls } i > j\}, \\ D &= \{(a_{ij}) \in M_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ falls } i \neq j\}. \end{aligned}$$

Aufgabe 10.3. Sei $\mathrm{Spur} : M_n(K) \to K$ die *Spurabbildung*, die durch $(a_{ij}) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$ definiert ist.

(a) Beweise, dass die Spurabbildung K-linear ist, und finde eine Basis von $\mathrm{Kern}(\mathrm{Spur})$.
(b) Zeige: für $A, B \in M_n(K)$ gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.

Aufgabe 10.4. Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(K^{m,n}, K)$. Zeige: Es existiert eine eindeutig bestimmte Matrix $F \in K^{n,m}$, so dass $f(X) = \mathrm{Spur}(FX)$ für alle $X \in K^{m,n}$.

Aufgabe 10.5. Sei $N = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$.

(a) Beweise, dass N eine Unteralgebra der $\mathbb{R}$-Algebra $M_2(\mathbb{R})$ ist.
(b) Beschreibe alle Algebra-Automorphismen der $\mathbb{R}$-Algebren $\mathbb{C}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, und N (wobei das Produkt von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ komponentenweise definiert ist, also $(a, b)(x, y) = (ax, by)$).
(c) Beweise, dass jede 2-dimensionale $\mathbb{R}$-Algebra zu genau einer der $\mathbb{R}$-Algebren $\mathbb{C}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, oder N isomorph ist.

Wir wünschen Euch schöne Feiertage und einen guten Rutsch ins 2008 !

---
*Abgabe: Dienstag 08.01.2008, vor der Vorlesung.