Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 11*, 04.01.2008

Aufgabe 11.1. Sei K ein Körper, $n \geq 2$, $1 \leq k, l \leq n$ und $e^{kl} = (e^{kl}_{ij}) \in M_n(K)$, wobei der Koeffizient $e^{kl}_{ij} \in K$ durch

$$e^{kl}_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = k \text{ und } j = l, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist. Also ist e^{kl} die Matrix, deren (k, l)-Koeffizient 1 ist und alle anderen 0 sind. Für $\lambda \in K$ und $k \neq l$, sei $E^{kl}(\lambda) = 1 + \lambda e^{kl} \in M_n(K)$.

(a) Zeige: $E^{kl}(\lambda)E^{kl}(\mu) = E^{kl}(\lambda + \mu)$ für $k \neq l$. Für welche $\lambda \in K$ ist $E^{kl}(\lambda)$ invertierbar?
(b) Zeige, dass $E^{ij}(\lambda) = E^{ik}(\lambda)E^{kj}(1)E^{ik}(-\lambda)E^{kj}(-1)$ falls $i \neq j \neq k \neq i$.
(c) Sei $A \in K^{m,n}$ und $B \in K^{n,p}$, für $m, p \geq 1$. Beschreibe $AE^{kl}(\lambda)$ und $E^{kl}(\lambda)B$.

Definition. Seien $k \neq l$. Eine Matrix der Form $E^{kl}(\lambda) \in M_n(K)$ heißt eine *Elementarmatrix*.

Aufgabe 11.2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} i & -1 & 1 \\ i-1 & -1 & i+1 \\ i+1 & i-1 & 1-2i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

Zeige, dass A invertierbar ist und berechne A^{-1}.

Aufgabe 11.3. Seien

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & -3 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,4}.$$

Zeige, dass A und B äquivalent sind, und finde invertierbare Matrizen P und Q mit $A = PBQ$.

Aufgabe 11.4. Seien V und W K-Vektorräume und seien $V_1, V_2 \subset V$ und $W_1, W_2 \subset W$ Teilräume mit $V = V_1 \oplus V_2$ und $W = W_1 \oplus W_2$. Ferner, sei $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung.

(a) Zeige: Es existieren eindeutige K-lineare Abbildungen $f_{ji} : V_i \to W_j$ mit $1 \leq i, j \leq 2$, so dass für $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ gilt $f(v_1 + v_2) = \big(f_{11}(v_1) + f_{12}(v_2)\big) + \big(f_{21}(v_1) + f_{22}(v_2)\big) \in W_1 \oplus W_2$. Man schreibt dann $f = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$.
(b) Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis von V, wobei $B_1 = \{b_1, \dots, b_k\}$ und $B_2 = \{b_{k+1}, \dots, b_n\}$ Basen von V_1, bzw. V_2 sind. Ebenso, sei $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ eine Basis von W, wobei $C_1 = \{c_1, \dots, c_l\}$ und $C_2 = \{c_{l+1}, \dots, c_m\}$ Basen von W_1, bzw. W_2 sind. Zeige, dass

$$C^B_C(f) = \begin{pmatrix} C^{B_1}_{C_1}(f_{11}) & C^{B_2}_{C_1}(f_{12}) \\ C^{B_1}_{C_2}(f_{21}) & C^{B_2}_{C_2}(f_{22}) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 11.5. Seien $m, n, p \geq 1$ und $A \in K^{p,n}$ mit $\mathrm{Rang}(A) = r$. Berechne den Rang der K-linearen Abbildung $\psi_A : K^{m,p} \to K^{m,n}$ mit $\psi_A(X) = XA$ für $X \in K^{m,p}$.

*Abgabe: Dienstag 15.01.2008, vor der Vorlesung.