Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 12*, 11.01.2008

Aufgabe 12.1. Sei $\mathbb{Z}[i]$ die Menge der ganzen Gauß'schen Zahlen, also

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

(a) Beweise, dass $\mathbb{Z}[i]$ ein Teilring von $\mathbb{C}$ ist.
(b) Sei $\mathbb{Z}[i]^\times \subset \mathbb{Z}[i]$ die Einheitsgruppe. Beweise, dass $\mathbb{Z}[i]^\times = \{1, -1, i, -i\}$.
(c) Seien $(G, *)$ und $(G, \star)$ die Gruppen mit vier Elementen aus der Übung 3.2. Zu welcher dieser Gruppen ist $\mathbb{Z}[i]^\times$ isomorph ?

Aufgabe 12.2. Sei K ein Körper und $\mu : M_n(K) \to K$ eine Funktion, die verträglich mit den Produkten ist, also $\mu(XY) = \mu(X)\mu(Y)$. Ferner nehmen wir an, dass μ weder konstant gleich 0 noch konstant gleich 1 ist. Zeige: $\mu(A)$ ist genau dann gleich Null, wenn A singulär (also nicht invertierbar) ist.

Aufgabe 12.3. Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ ist eine Diagonalmatrix, falls $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$. Man schreibt dann $A = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.

(a) Zeige, dass für $i \neq j$ die Elementarmatrix $E^{ij}(1) \in M_n(K)$ nicht zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist.
(b) Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in K$. Zeige, dass die zwei Diagonalmatrizen $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $\operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ genau dann ähnlich sind, wenn es eine Bijektion $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $\lambda_i = \mu_{\sigma(i)}$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Aufgabe 12.4. Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Für $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ bezeichnen wir mit ${}^tA$ die zu A transponierte Matrix, also ${}^tA = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = a_{ji}$. Untersuche, welche der folgenden Teilmengen von $GL_n(K)$ Untergruppen sind:

$$\begin{aligned}
D &= \{(a_{ij}) \in GL_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ für alle } i \neq j\}\,, \\
D' &= D \cup \{(a_{ij}) \in GL_n(K) \mid a_{ij} = 0 \text{ für alle } i \neq n - j + 1\}\,, \\
G &= \{(a_{ij}) \in GL_n(K) \mid a_{ii} = 1 \text{ für alle } i\}\,, \\
O &= \{A \in GL_n(K) \mid A \cdot {}^tA = 1\}\,.
\end{aligned}$$

Sei nun $K = \mathbb{Q}$. Ist $M_n(\mathbb{Z}) \cap GL_n(\mathbb{Q}) = \{(a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{Q}) \mid a_{ij} \in \mathbb{Z} \text{ für alle } i, j\}$ eine Untergruppe von $GL_n(\mathbb{Q})$?

Aufgabe 12.5. Sei K ein Körper, $n \geq 1$, und für $1 \leq i \leq n$ sei $s_i : M_n(K) \to K$ durch

$$s_i(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad \text{falls} \quad A = (a_{ij})$$

definiert. Sei $B_n(K) = \{A \in M_n(K) \mid s_1(A) = \cdots = s_n(A)\} \subset M_n(K)$.

(a) Zeige, dass $B_n(K)$ eine Unteralgebra von $M_n(K)$ ist.
(b) Beweise, dass $s_1 : B_n(K) \to K$ ein Homomorphismus von K-Algebren ist.
(c) Berechne die Dimension von $B_n(K)$ als K-Vektorraum.

*Abgabe: Dienstag 22.01.2008, vor der Vorlesung.