ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 2*, 19.10.2007

Aufgabe 2.1. Betrachte das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 + a^3x_4 = \sqrt{3} \\ x_1 + bx_2 + b^2x_3 + b^3x_4 = \sqrt{33} \\ x_1 + cx_2 + c^2x_3 + c^3x_4 = \sqrt{333} \\ x_1 + dx_2 + d^2x_3 + d^3x_4 = \sqrt{3333}\,. \end{cases}$$

(a) Welche Bedingungen müssen die reellen Zahlen a, b, c und d erfüllen, damit dieses System genau eine reelle Lösung $(x_1, \ldots, x_4)$ hat ?
(b) Kann man $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ wählen, so dass dieses System mehr als eine Lösung hat ?

Hinweis : Es sind $a^2 - b^2$ und $a^3 - b^3$ durch $a - b$ teilbar.

Definition. Eine *binäre Operation* auf eine Menge S ist eine Abbildung

$$S \times S \xrightarrow{*} S$$
$$(a, b) \mapsto a * b\,.$$

Solch eine Operation $*$ auf S heißt *assoziativ*, falls die Gleichung

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

für alle $a, b, c \in S$ gilt. Die Operation ist *kommutativ*, falls die Gleichung

$$a * b = b * a$$

für alle $a, b \in S$ gilt. Ein Element $e \in S$ heißt *neutral*, falls

$$a * e = a = e * a$$

für alle $a \in S$ gilt. Ein Element $b \in S$ ist ein *Inverse* von $a \in S$, falls

$$a * b = e = b * a$$

mit e neutral gilt.

Aufgabe 2.2. Sei S eine Menge mit einer binären Operation $*$. Zeige :
(a) Falls $e, e' \in S$ neutral sind, dann gilt $e = e'$.
(b) Falls $*$ assoziativ ist, dann gelten

$$((a * b) * c) * d = a * (b * (c * d))$$
$$(((a * b) * c) * d) * f = a * ((b * c) * (d * f))$$

für beliebige $a, b, c, d, f \in S$.
(c) Falls $*$ assoziativ ist, und $b, c \in S$ beide Inverse von $a \in S$ sind, dann gilt $b = c$.

Fortsetzung auf der Rückseite

*Abgabe : Dienstag 30.10.2007, vor der Vorlesung.

Aufgabe 2.3. Sei $S = \{a, b\}$ eine Menge mit zwei Elementen.

(a) Finde eine kommutative, nicht assoziative binäre Operation auf S.
(b) Finde eine assoziative, nicht kommutative binäre Operation auf S.

Aufgabe 2.4. Sei S eine Menge mit einer binärer Operation $*$.

(a) Gegeben sei $a, b, c, d \in S$. Wieviele Arten gibt es, zwei Paare von Klammern in ein mehrfaches Produkt $a * b * c * d$ einzusetzen, damit es in S wohldefiniert ist ?
(b) Nehmen wir an, S hat ein neutrales Element e. Beweise, dass die Operation $*$ genau dann assoziativ und kommutativ ist, wenn die Gleichung

$$(a * b) * (c * d) = (a * c) * (b * d)$$

für beliebige $a, b, c, d \in S$ gilt.

Aufgabe 2.5. Sei $S = \{a, b, c\}$ eine Menge mit drei Elementen.

(a) Wieviele verschiedene binäre Operationen gibt es auf S ?
(b) Wieviele davon sind kommutativ ?
(c) Beschreibe alle verschiedenen binären Operationen auf S, die kommutativ und assoziativ sind, mit $e = c$ als neutralem Element.
Hinweis: Solch eine Operation $*$ auf S kann man durch ihre Multiplikationstafel darstellen :

$$\begin{array}{c|ccc} * & e & a & b \\ \hline e & ? & ? & ? \\ a & ? & ? & ? \\ b & ? & ? & ? \end{array}$$