Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 3*, 26.10.2007

Definition. Eine *Gruppe* $(G, *)$ besteht aus einer Menge G und einer assoziativen binären Operation $* : G \times G \to G$ mit neutralem Element, so dass jedes Element aus G ein Inverses hat. Eine Abbildung $f : G \to H$ zwischen zwei Gruppen $(G, *)$ und $(H, \star)$ ist ein *Homomorphismus (von Gruppen)*, falls

$$f(x * y) = f(x) \star f(y)$$

für alle $x, y \in G$ gilt. Ein Homomorphismus von Gruppen $f : G \to H$ ist ein *Isomorphismus (von Gruppen)*, falls es eine Abbildung $g : H \to G$ gibt, so dass

$$g(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(g(y)) = y$$

für alle $x \in G$ und alle $y \in H$ gilt. Zwei Gruppen $(G, *)$ und $(H, \star)$ sind *isomorph* (zu einander), falls es einen Isomorphismus $f : G \to H$ gibt.

Aufgabe 3.1. Gegeben seien zwei Gruppen $(G, *)$ und $(H, \star)$ und ein Homomorphismus von Gruppen $f : G \to H$.

(a) Es seien $e \in G$ und $e' \in H$ die neutralen Elemente. Beweise, dass $f(e) = e'$.
(b) Falls $y \in G$ das Inverse von x in G ist, zeige, dass $f(y)$ das Inverse von $f(x)$ in H ist.
(c) Falls f ein Isomorphismus ist, zeige, dass es eine einzige Abbildung $g : H \to G$ mit $g(f(x)) = x$ und $f(g(y)) = y$ für alle $x \in G$ und alle $y \in H$ gibt (man notiert sie $g = f^{-1}$ und nennt sie die *Umkehrabbildung* von f).
(d) Falls f ein Isomorphismus ist, zeige, dass dann auch f^{-1} ein Isomorphismus von Gruppen ist.

Aufgabe 3.2. Es seien zwei binäre Operation $*$ und $\star$ auf $G = \{e, a, b, c\}$ durch ihre Multiplikationstafeln gegeben:

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

$\star$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

(a) Beweise, dass $(G, *)$ und $(G, \star)$ kommutative Gruppen sind.
(b) Beweise, dass $(G, *)$ und $(G, \star)$ nicht isomorph sind.
(c) Beweise, dass jede Gruppe mit 4 Elementen entweder zu $(G, *)$ oder zu $(G, \star)$ isomorph ist.

Fortsetzung auf der Rückseite

*Abgabe: Dienstag 06.11.2007, vor der Vorlesung.

Aufgabe 3.3. Finde einen Körper $k = \{0, 1, a, b\}$ mit 4 Elementen, und beschreibe ihn durch die Tafeln der Addition und der Multiplikation.

Aufgabe 3.4. Es sei $(\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}, +, \cdot)$ der Primkörper mit zwei Elementen. Auf der Menge $\ell = \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$ definiert man eine Addition durch

$$(a, b, c) + (x, y, z) = (a + x, b + y, c + z)$$

und eine Multiplikation durch

$$(a, b, c)(x, y, z) = (ax + bz + cy, ay + bx + bz + cy + cz, az + cx + by + cz),$$

für alle (a, b, c) und (x, y, z) in ℓ. Beweise, dass $(\ell, +, \cdot)$ ein Körper mit 8 Elementen ist.
Hinweis: Es sei $u = (1, 1, 1) \in \ell$. Zeige und benutze, dass $\ell \smallsetminus \{0\} = \{u, u^2, u^3, u^4, u^5, u^6, u^7\}$.

Aufgabe 3.5. In dieser Aufgabe betrachten wir Gleichungssysteme mit Koeffizienten in endlichen Körpern.

(a) Es sei $\mathbb{F}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ der Primkörper mit 7 Elementen. Finde alle Lösungen

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \in (\mathbb{F}_7)^4$$

des Gleichungssystems

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_4 = 4\,. \end{cases}$$

(b) Es sei $k = \{0, 1, a, b\}$ der Körper aus der Aufgabe 3.3. Beschreibe die Lösungen

$$(x, y) \in k^2$$

des Gleichungssystems

$$\begin{cases} x + ay = b \\ ax + by = 1\,. \end{cases}$$