Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 4*, 02.11.2007

Aufgabe 4.1. Sei G eine Gruppe, in der jedes Element invers zu sich selbst ist. Zeige, dass G kommutativ ist.

Aufgabe 4.2. Sei $\alpha = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$, und sei $\mathbb{Q}(\alpha) = \{a + b\alpha + c\alpha^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$. Zeige, dass $\mathbb{Q}(\alpha)$ ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist.

Aufgabe 4.3. Sei K ein Körper und sei V ein K-Vektorraum. Wir bezeichnen mit $\langle S\rangle$ die *lineare Hülle* einer Teilmenge S von V, also

$$\langle S\rangle = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} k_i s_i \mid n \in \mathbb{N},\ k_i \in K,\ s_i \in S \Big\} \subset V\,.$$

Zeige, dass die Gleichung von Teilräumen

$$\langle S \cup T\rangle = \langle S\rangle + \langle T\rangle$$

für beliebige Teilmengen $S, T \subset V$ gilt.

Aufgabe 4.4. Sei X eine Menge, und sei $\mathbb{R}^X$ die Menge aller Abbildungen von X nach $\mathbb{R}$.

(a) Beweise, dass $\mathbb{R}^X$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wobei die Addition und die $\mathbb{R}$-Wirkung durch

$$(af + bg)(x) = a(f(x)) + b(g(x))$$

in $\mathbb{R}$ für alle $f, g \in \mathbb{R}^X$, alle $a, b \in \mathbb{R}$ und alle $x \in X$ definiert sind.

(b) Bestimme, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ auch Teilräume sind:

$A = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$ $\qquad D = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$

$B = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$ $\qquad E = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f \text{ monoton wachsend}\}$

$C = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f(1) = 1\}$ $\qquad F = \{f \in \mathbb{R}^\mathbb{R} \mid f(x+1) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 4.5. Seien A, B und C Teilräume eines Vektorraumes V.

(a) Zeige, dass, falls $C \subset A$, die folgende Gleichung von Teilräumen gilt:

$$A \cap (B + C) = (A \cap B) + C\,.$$

(b) Prüfe, ob die Verteilungsgesetze
(i) $A \cap (B + C) = (A \cap B) + (A \cap C)$,
(ii) $A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C)$
allgemein gelten.

---

*Abgabe: Dienstag 13.11.2007, vor der Vorlesung.