ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 5*, 09.11.2007

Aufgabe 5.1. Zeige, dass die Kommutativität der Addition aus den übrigen Axiomen für einen Vektorraum folgt.

Aufgabe 5.2. Gegeben seien die folgenden Mengen von Spaltenvektoren:

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}, \qquad M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Man fasse M_1, M_2, M_3 und M_4 als Untermengen von $\mathbb{Q}^3$ auf. Welche der Mengen M_i sind linear abhängig?
(b) Man fasse M_1, M_2, M_3 und M_4 als Untermengen von $(\mathbb{F}_7)^3$ auf, wobei $\mathbb{F}_7$ der Primkörper mit sieben Elementen ist. Welche der Mengen M_i sind linear abhängig?

Aufgabe 5.3. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Beweise die folgenden Aussagen:
(a) Seien $u, v \in V \setminus \{0\}$. Dann ist die Untermenge

$$\{u, u - v, u + v\} \subset V$$

linear abhängig, wenn $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ (also wenn $1 + 1 \neq 0$ in K).
(b) Es sei $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ein linear unabhängiges System von Vektoren in V. Für

$$u = \textstyle\sum_{i=1}^n a_i u_i \in V$$

ist das System $\{u_1 - u, u_2 - u, \ldots, u_n - u\}$ genau dann linear abhängig, wenn $\sum_{i=1}^n a_i = 1$.

Aufgabe 5.4. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ eine Teilmenge mit $0 \notin M$. Zeige, dass M genau dann linear unabhängig ist, wenn

$$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle = \{0\}$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n - 1\}$ gilt.

Aufgabe 5.5. Sei K ein Körper und M eine unendliche Menge.
(a) Zeige, dass der K-Vektorraum K^M nicht endlich erzeugt ist.
(b) Zeige, dass der K-Vektorraum $K^{(M)}$ nicht endlich erzeugt ist.
(c) Kann der K-Vektorraum $K^{\mathbb{N}}$ ein abzählbares Erzeugendensystem besitzen?

---

*Abgabe: Dienstag 20.11.2007, vor der Vorlesung.