Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 6*, 16.11.2007

Aufgabe 6.1. Seien $a_1 = (1,3,2)$, $a_2 = (-1,0,1)$, $a_3 = (1,1,0)$ und $a_4 = (1,2,3)$ in $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeige, dass $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist.
(b) Finde alle Untermengen von $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, die eine Basis bilden.

Aufgabe 6.2. Wir betrachten die folgenden Unterräume von $\mathbb{R}^4$:

$$L = \langle (0,0,1,2), (4,2,1,2), (-6,-3,2,4) \rangle \,,$$
$$M = \langle (3,5,5,3), (2,3,3,2), (-1,1,1,-1) \rangle \,.$$

Finde eine Basis von L, von M, von $L \cap M$ und von $L + M$, und gib die Dimension von diesen Unterräumen an.

Aufgabe 6.3. Sei $P_3 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0, \ldots, a_3 \in \mathbb{R}\}$ die Menge der Polynomen von Grad ≤ 3 mit reellen Koeffizienten.

(a) Zeige, dass P_3 ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.
(b) Zeige, dass $B_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ und $B_2 = \{1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3\}$ Basen von P_3 sind.
(c) Berechne die Koordinaten von den Vektoren $u = 1 + x^3$, $v = 1 + x^2 + x^3$ und $w = 12$ bezüglich der Basis B_1.
(d) Berechne die Koordinaten von den Vektoren u, v und w in P_3 bezüglich der Basis B_2.

Aufgabe 6.4. Es seien $U_1, U_2, \ldots, U_n$ endlich-dimensionale Teilräume eines Vektorraumes V. Beweise

$$\dim(U_1 + \cdots + U_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim(U_i) - \sum_{i=2}^{n} \dim\big((U_1 + \cdots + U_{i-1}) \cap U_i\big)\,.$$

Aufgabe 6.5. Es sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen. Zeige: K^n enthält eine unendliche Teilmenge M mit der Eigenschaft, dass je n Vektoren aus M eine Basis von K^n bilden.

---

*Abgabe: Dienstag 27.11.2007, vor der Vorlesung.