Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 7*, 23.11.2007

Aufgabe 7.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der Lösungsraum des Gleichungssystems

$$\begin{cases} x + y + z + u = 0 \\ x + 2y + 3z + 4u = 0\,. \end{cases}$$

(a) Finde eine Basis von U.
(b) Finde eine Basis eines Komplementärraumes zu U in $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 7.2. Sei V ein Vektorraum, und seien U und U' Teilräume von V mit $V = U \cup U'$. Beweise: es gilt $U = V$ oder $U' = V$.

Aufgabe 7.3. Sei p ein Primzahl, sei $\mathbb{F}_p$ der Primkörper mit p Elementen, und sei $n \in \mathbb{N}$.
(a) Wie viele (geordnete) Basen von $(\mathbb{F}_p)^n$ gibt es?
(b) Wie viele Teilräume der Dimension 1 gibt es in $(\mathbb{F}_p)^n$?
(c) Sei $m \in \mathbb{N}$. Wie viele Teilräume der Dimension m gibt es in $(\mathbb{F}_p)^n$?

Aufgabe 7.4. Sei L ein Körper, und sei $K \subset L$ ein Teilkörper.
(a) Zeige, dass L ein K-Vektorraum ist, wobei die Addition und die K-Wirkung durch die Addition und die Multiplikation im Körper L definiert sind.
(b) Sei $V \subset L$ ein endlich dimensionaler K-Untervektorraum des K-Vektorraums L, mit $V \neq \{0\}$, so dass V unter der Multiplikation in L abgeschlossen ist:

$$V \cdot V = \{uv \in L \,|\, u, v \in V\} \subset V\,.$$

Zeige, dass V ein Teilkörper von L ist.
Hinweis: für $x \in V$ zeige, dass $xV = \{xv \in L \,|\, v \in V\}$ ein Teilraum von V ist, und betrachte die Folge von Teilräumen

$$xV \supset x^2V \supset x^3V \supset \dots\,.$$

Aufgabe 7.5. Sei $\omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$.
(a) Zeige: $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ und $\omega^3 = 1$.
(b) Sei $E = \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ (die Menge aller Abbildungen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$) als $\mathbb{C}$-Vektorraum aufgefasst. Für $i = 0, 1, 2$ definiert man

$$E_i = \{f \in E \,|\, f(\omega x) = \omega^i f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{C}\}\,.$$

Zeige, dass E_i ein Teilraum von E ist.
(c) Beweise: es gilt $E = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$.

*Abgabe: Dienstag 4.12.2007, vor der Vorlesung.