ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 8*, 30.11.2007

Aufgabe 8.1. Entscheide, ob die folgenden Abbildungen K-linear sind, und finde gegebenenfalls eine Basis ihres Kernes und ihres Bildes:

$\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(x,y,z) = (x-2y, 6y-3x)$, für $K = \mathbb{R}$,
$\beta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\beta(z) = \bar{z}$, für $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, wobei $\bar{z}$ die zu z konjugierte Zahl ist,
$\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\gamma(z) = z - \bar{z}$, für $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$,
$\delta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\delta(z) = |z|$, für $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, wobei $|z|$ der Betrag von z ist,
$\epsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\epsilon(z) = az + b$, mit $a, b \in \mathbb{C}$ gegeben, und $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$,
$\zeta : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $\zeta(x,y) = (2y, x^2 + 2xy + y^2)$, für $K = \mathbb{Q}$,
$\eta : (\mathbb{F}_3)^2 \to (\mathbb{F}_3)^3$, $\eta(x,y) = (2x+y, y-x^3, x+2y)$, für $K = \mathbb{F}_3$.

Aufgabe 8.2. Sei $f : V \to W$ ein Isomorphismus von K-Vektorräumen, sei $M \subset V$ eine Teilmenge, und sei $f(M) = \{f(m) \,|\, m \in M\} \subset W$ das Bild von M unter f.

(a) Zeige: M ist genau dann linear unabhängig, wenn $f(M)$ linear unabhängig ist.
(b) Zeige: M ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn $f(M)$ ein Erzeugendensystem von W ist.
(c) Zeige: M ist genau dann eine Basis von V, wenn $f(M)$ eine Basis von W ist.

Aufgabe 8.3. Seien $f : V \to U$ und $g : V \to W$ K-lineare Abbildungen, mit f surjektiv.

(a) Beweise, dass es genau dann eine Abbildung $h : U \to W$ mit $g = h \circ f$ gibt, wenn $\mathrm{Kern}(f) \subset \mathrm{Kern}(g)$.
(b) Zeige: falls eine Abbildung h wie in (a) existiert, dann ist sie K-linear, eindeutig, und es gelten

$$\mathrm{Kern}(h) = f\big(\mathrm{Kern}(g)\big) \text{ und } \mathrm{Bild}(h) = \mathrm{Bild}(g).$$

Definition. Sei V ein K-Vektorraum, und seien U^+, U^- Teilräume von V. Wir nennen eine lineare Abbildung $\alpha : V \to V$ *die Symmetrie bezüglich U^+ entlang U^-* falls Folgendes gilt:

(i) $V = U^+ \oplus U^-$, und
(ii) $\alpha(x) = x$ für alle $x \in U^+$ und $\alpha(y) = -y$ für alle $y \in U^-$.

Aufgabe 8.4. Sei V ein K-Vektorraum, und sei $\alpha : V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Es sei $\mathrm{Char}(K) \neq 2$. Beweise, dass α genau dann eine Symmetrie ist, wenn $\alpha \circ \alpha = \mathrm{id}_V$.
(b) Falls $\mathrm{Char}(K) = 2$, folgt aus $\alpha \circ \alpha = \mathrm{id}_V$, dass α die Identität ist?

Aufgabe 8.5. Sei $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Für $k \in \mathbb{Z}$ definiert man $g_k \in E$ durch $g_k(x) = \cos(kx)$ und $h_k(x) \in E$ durch $h_k(x) = \sin(kx)$.

(a) Zeige, dass die Teilmenge $M = \{g_k \,|\, k \geq 0\} \subset E$ linear unabhängig ist.
(b) Zeige, dass die Teilmenge $N = \{h_\ell \,|\, \ell \geq 1\} \subset E$ linear unabhängig ist.
(c) Zeige, dass die Teilmenge $M \cup N \subset E$ linear unabhängig ist.

---

*Abgabe: Dienstag 11.12.2007, vor der Vorlesung.