ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA I

Blatt 9*, 07.12.2007

Aufgabe 9.1. Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$f(w,x,y,z) = (w + 2x + 3y + 4z,\ 2w + 3x + y + 4z,\ 3w + x + 2y + 4z)$$

definierte lineare Abbildung.

(a) Gib die Matrix von f bezüglich der kanonischen Basen von $\mathbb{R}^4$ und $\mathbb{R}^3$ an.

(b) Finde Basen A von $\mathbb{R}^4$ und B von $\mathbb{R}^3$, so dass die Matrix $C^A_B(f)$ von f bezüglich A und B die folgende Gestalt hat:

$$C^A_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.2. Sei $\mathbb{C}[x]$ die $\mathbb{C}$-Algebra der Polynome in der Variable x. Sei $P_n \subset \mathbb{C}[x]$ der Unterraum der Polynome von Grad $\leq n$, also $P_n = \{\sum_{i=0}^n a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{C}\}$. Sei $D : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ die Ableitung, die durch

$$D(\textstyle\sum_{i\geq 0} a_i x^i) = \sum_{i\geq 0} (i+1) a_{i+1} x^i$$

definiert ist (wobei fast alle a_i Null sind). Für $f \in \mathbb{C}[x]$ notieren wir $H_f : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ die Multiplikation mit f, also $H_f(g) = fg$ für alle $g \in \mathbb{C}[x]$.

(a) Zeige, dass die Abbildung $\phi = D \circ H_{x^2-1} \circ D : \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ linear ist.

(b) Beweise: $\phi = 2H_x \circ D + H_{x^2-1} \circ D \circ D$.

(c) Zeige, dass sich ϕ zu einer linearen Abbildung $\phi|_{P_3} : P_3 \to P_3$, $g \mapsto \phi(g)$ einschränken lässt. Berechne die Matrix $C^B_B(\phi|_{P_3})$ von $\phi|_{P_3}$ bezüglich der Basis $B = \{1, x, x^2, x^3\}$.

Aufgabe 9.3. Sei V ein K-Vektorraum, und sei $\mathrm{End}_K(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ ist } K\text{-linear}\}$ der Endomorphismenring von V. Beweise:

(a) Falls $\dim(V) = 1$, dann gibt es einen Isomorphismus von Ringen $K \cong \mathrm{End}_K(V)$.

(b) Falls $\dim(V) > 1$, dann ist $\mathrm{End}_K(V)$ als Ring nicht kommutativ und er besitzt Nullteiler (also existieren $\alpha, \beta \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\alpha \neq 0 \neq \beta$ und $\alpha \circ \beta = 0$).

Aufgabe 9.4. Seien U, V und W endlichdimensionale Vektorräume. Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige:

(a) $\mathrm{Rang}(g \circ f) \leq \mathrm{Rang}(g)$,

(b) $\mathrm{Rang}(g \circ f) \leq \mathrm{Rang}(f)$,

(c) $\mathrm{Rang}(g \circ f) \geq \mathrm{Rang}(g) + \mathrm{Rang}(f) - \dim(V)$.

Aufgabe 9.5. Sei $\alpha : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Wir nennen eine K-lineare Abbildung $\beta : W \to V$ ein *verallgemeinertes Inverses* zu α, falls es $\alpha \circ \beta \circ \alpha = \alpha$ und $\beta \circ \alpha \circ \beta = \beta$ gelten. Beweise:

(a) Falls α ein Isomorphismus ist, dann ist α^{-1} das einzige verallgemeinerte Inverse zu α.

(b) Falls β ein verallgemeinertes Inverses zu α ist, dann gelten $V = \mathrm{Kern}(\alpha) \oplus \mathrm{Bild}(\beta)$ und $W = \mathrm{Kern}(\beta) \oplus \mathrm{Bild}(\alpha)$.

(c) Falls W endlichdimensional ist, dann existiert ein verallgemeinertes Inverses zu α.

*Abgabe: Dienstag 18.12.2007, vor der Vorlesung.