Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 1*, 04.04.2008

Aufgabe 1.1. Sei $n \geq 1$ und sei $A_n = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Q})$ die Matrix, die durch $a_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ definiert ist, wobei $\delta_{ij} = 0$ falls $i \neq j$ und $\delta_{ij} = 1$ falls $i = j$. Beweise:

$$\det(A_n) = (-1)^{n-1}(n-1)\,.$$

Aufgabe 1.2. Sei K ein Körper, $n \geq 1$ und sei $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Sei $B = (b_{ij}) \in M_n(K)$ die Matrix, die durch

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$$

definiert ist. Beweise, dass $\det(A) = \det(B)$ gilt.

Aufgabe 1.3. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung, so dass f dieselbe Matrix bezüglich aller Basen von V hat. Beweise: f ist eine Homothetie.

Aufgabe 1.4. Sei K ein Körper, $n \geq 1$ und seien

$$A, B \in GL_n(K).$$

Entscheide, ob die folgenden Aussagen allgemein gelten, und begründe deine Antwort.

(a) Falls $A, B \in SL_n(K)$, dann gilt auch $A + B \in SL_n(K)$.
(b) Es existiert $\lambda \in K$ mit $\lambda A \in SL_n(K)$.
(c) Es gilt $ABA^{-1}B^{-1} \in SL_n(K)$.
(d) Falls $A^2 = B^2$, dann gilt $AB^{-1} \in SL_n(K)$.
(e) Für $K = \mathbb{F}_2$ gilt $SL_n(\mathbb{F}_2) = GL_n(\mathbb{F}_2)$.

Aufgabe 1.5. Sei K ein Körper, seien U, V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und seien

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$$

K-lineare Abbildungen. Entscheide, ob die folgenden Aussagen allgemein gelten, und begründe deine Antwort.

(a) Falls f und $g \circ f$ Isomorphismen sind, dann ist g auch ein Isomorphismus.
(b) Falls $g \circ f = 0$, dann ist g nicht injektiv.
(c) Falls $g \circ f$ ein Isomorphismus ist, dann gilt $\dim(V) = \mathrm{Rang}(f) + \dim(\mathrm{Kern}(g))$.
(d) Es gilt $\mathrm{Rang}(g \circ f) \leq \mathrm{Rang}(f)$.
(e) Falls $g \circ f$ ein Isomorphismus ist, dann ist f injektiv.

Bitte lesen Sie die Information zum Übungsbetrieb auf der Rückseite.

*Abgabe: Dienstag 15.04.20078 vor der Vorlesung.

Information zum Übungsbetrieb

Einteilung in die Übungsgruppen. Im Anschluss an die Vorlesung am heutigen Dienstag, den 8. April 2008 werden im Vorraum des Hörsaals Listen ausgehängt, auf denen Sie die folgenden Informationen finden: Nummer der Übungsgruppe, Name des Übungsgruppenleiters, Zeit und Ort, zu denen sich die Übungsgruppe trifft. Bitte tragen Sie sich in eine der Listen ein. Verwenden Sie nicht mehr als die vorgesehenen Zeilen, anderenfalls müssen wir Sie willkürlich in nicht gefüllte Übungsgruppen einteilen. Bitte merken Sie sich die Nummer Ihrer Übungsgruppe sowie Zeit und Ort.

Die erste Übungsgruppen treffen sich am Donnerstag, den 10. April, bzw. Montag, den 14. April. Wir raten Ihnen, die Übungen regelmäßig zu besuchen, dort werden die Übungsaufgaben besprochen und Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen beantwortet.

Übungsaufgaben. Jeweils freitags um 16 Uhr auf der Veranstaltungshomepage (siehe unten) liegt ein neues Blatt zum Herunterladen, das Sie innerhalb der darauffolgenden Woche bearbeiten sollen. Voraussichtlich gibt es für jedes Aufgabenblatt 20 Punkte, die sich gleichmäßig auf die Aufgaben verteilen. Dienstags vor der Vorlesung werden Mappen im Hörsaal ausliegen, eine für jede Übungsgruppe. Legen Sie bitte Ihre Lösungen der Aufgaben der Vorwoche in die Mappe Ihrer Gruppe. Vergessen Sie nicht, Ihre Lösungen mit

- Ihrem Namen und Vornamen,
- der Nummer Ihrer Übungsgruppe und dem Namen des Übungsgruppenleiters

zu beschriften und geben Sie Ihre Lösungen pünktlich zum angegebenen Termin ab. Es dürfen bis zu drei Teilnehmer aus derselben Übungsgruppe gemeinsam abgeben. Es können nur handschriftliche Lösungen akzeptiert werden. Die Lösungen werden dann von Ihrem Übungsgruppenleiter korrigiert und in der Übungsgruppe zurückgegeben.

Homepage. Die Homepage der Veranstaltung finden Sie unter

`http://www.math.uni-bonn.de/people/ausoni/la2-ss08.html`

Dort steht Information zu den folgenden Themen :

- Übungsbetrieb und Übungsgruppen.
- Voraussetzungen für die Zulassung zur Klausur.
- Termine für die Klausur und die Nachklausur.
- Literatur.
- Sprechstunde und Kontakt.

Außerdem finden Sie auf dieser Homepage jeden Freitag ab 16 Uhr ein neues Übungsblatt zum Herunterladen.

Wir wünschen Ihnen weiterhin viel Erfolg im Studium !