Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 10*, 13.06.2008

Aufgabe 10.1. Entscheide, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{F}_5)$$

trigonalisierbar ist. Bestimme gegebenenfalls eine Jordansche Normalform zu A, und gib eine entsprechende Basiswechselmatrix an.

Aufgabe 10.2. Seien F und G zwei selbstadjungierte Endomorphismen auf einem endlichdimensionalen euklidischen bzw. unitären Vektorraum. Zeige, dass FG genau dann selbstadjungiert ist, wenn $FG = GF$.

Aufgabe 10.3. Sei $V = \mathbb{R}[t]$ der reelle Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten und sei $\psi : V \to V$ die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, die durch

$$\psi(f(t)) = (t^2 - 1)f''(t) + 2tf'(t)$$

definiert ist. Beweise, dass es für jedes $n \geq 0$ ein einziges normiertes Polynom $p_n(t) \in V$ vom Grad n gibt, das Eigenvektor von ψ ist. Was ist der zu $p_n(t)$ gehörende Eigenwert ?

Aufgabe 10.4. Seien V und ψ wie in der vorigen Aufgabe und sei $\phi : V \times V \to \mathbb{R}$ durch

$$\phi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

definiert. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) ϕ ist ein Skalarprodukt auf V.
(b) ψ ist selbstadjungiert bezüglich ϕ.
(c) Die Eigenvektoren $\{p_n(t) \mid n \geq 0\}$ bilden eine orthogonale Basis von V.
(d) Wendet man das Gram-Schmidt-Verfahren auf der Basis $\{t^i \mid i \geq 0\}$ von V an, so bekommt man die orthonormale Basis $\{\|p_i\|^{-1} p_i \mid i \geq 0\}$.

Aufgabe 10.5. Sei $n \geq 1$, $A \in M_n(\mathbb{R})$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sodass

$$\alpha < \mathrm{Re}(\lambda) < \beta$$

für alle (möglicherweise komplexen) Eigenwerte λ von A, wobei $\mathrm{Re}(\lambda)$ den Realteil von λ bezeichnet. Beweise, dass auf $\mathbb{R}^n$ ein Skalarprodukt s mit assozierter Norm $\|\ \|$ existiert, sodass die Relation

$$\alpha \|x\|^2 < s(Ax, x) < \beta \|x\|^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.

*Abgabe: Dienstag 24.06.2008 vor der Vorlesung.