Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 11*, 20.06.2008

Aufgabe 11.1. Seien V und W endlich dimensionale K-Vektorräume. Zeige, dass

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) \to \mathrm{Hom}_K(W^*,V^*), \quad F \mapsto F^*$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen ist. Falls $V=W$, ist dies ein Isomorphismus

$$\mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{End}_K(V^*)$$

von K-Algebren ?

Aufgabe 11.2. Es seien U,W Teilräume eines endlich dimensionalen K-Vektorraums V. Wir bezeichnen mit $X^0 \subset V^*$ den orthogonalen Raum eines Teilraums $X \subset V$. Zeige :

(a) $(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$,
(b) $U^0 + W^0 = (U \cap W)^0$.

Aufgabe 11.3. Sei $B = \{e_1,\dots,e_n\}$ eine Basis eines unitären Vektorraums V. Sei $C = \{f_1,\dots,f_n\}$ eine orthonormale Basis von V, sodass die Transformationsmatrix $\mathcal{T}_B^C$ eine obere Dreiecksmatrix mit reellen positiven Diagonalkoeffizienten ist.

(a) Beweise: C ist die Basis die man bekommt, wenn man auf B das Gram-Schmidt-Verfahren anwendet.
(b) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine hermitesche positiv definite Matrix. Zeige, dass es eine einzige obere Dreiecksmatrix $S \in M_n(\mathbb{C})$ mit reellen positiven Diagonalkoeffizienten gibt, sodass $A = {}^tS\bar{S}$ gilt.

Aufgabe 11.4. Seien $v_1,\dots,v_p$ lineare unabhängige Vektoren des Euklidischen Raums $\mathbb{R}^n$. Wir definieren $H_i = v_i^\perp$ und s_i die orthogonale Symmetrie bezüglich H_i, also

$$s_i(x) = x - 2\frac{\langle x, v_i\rangle}{\|v_i\|} v_i \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Beweise, dass $H_1 \cap \dots \cap H_p$ der Eigenraum zum Eigenwert 1 der linearen Abbildung $s_1 \circ \dots \circ s_p$ ist.

Aufgabe 11.5. Es seien $A \in M_k(\mathbb{C})$, $B \in M_\ell(\mathbb{C})$ und $C \in M_{\ell,k}(\mathbb{C})$, sodass

$$M = (m_{ij}) = \begin{pmatrix} A & {}^t\bar{C} \\ C & B \end{pmatrix} \in M_{k+\ell}(\mathbb{C})$$

eine hermitesche positiv definite Matrix ist. Beweise, dass die folgenden Ungleichungen gelten:

(a) $\det(M) \le \det(A)\det(B)$,
(b) $\det(M) \le \prod_{i=1}^{k+\ell} m_{ii}$.

---

*Abgabe: Dienstag 01.07.2008 vor der Vorlesung.