Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 12*, 27.06.2008

Aufgabe 12.1. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$. Finde die obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalkoeffizienten $S \in M_4(\mathbb{R})$, die die Gleichung ${}^tSS = A$ erfüllt.

Aufgabe 12.2. Seien V, W endlichdimensionale euklidische Vektorräume und sei $F : V \to W$ ein Homomorphismus.

(a) Beweise: Für jeden Teilraum $U \subset W$ gilt
$$F^{\mathrm{ad}}(U^\perp) = \big(F^{-1}(U)\big)^\perp .$$

(b) Sei $V = W$. Ist F selbstadjungiert, so gilt $F(U)^\perp = \big(F^{-1}(U)\big)^\perp$ für alle Teilräume $U \subset V$. Gilt die Umkehrung auch?

Aufgabe 12.3. Sei V ein endlichdimensionaler unitärer Vektorraum und sei
$$\Omega = \{f \in \mathrm{End}(V) \mid f^{\mathrm{ad}} = -f\} \subset \mathrm{End}(V) .$$

(a) Sei $f \in \Omega$. Zeige, dass $\mathrm{id}_V + f$ und $\mathrm{id}_V - f$ Automorphismen von V sind, und dass
$$u(f) = (\mathrm{id}_V + f)(\mathrm{id}_V - f)^{-1}$$
unitär ist.

(b) Sei $\Theta = \{g \in \mathrm{End}(V) \mid g \text{ unitär und } -1 \text{ ist kein Eigenwert von } g\} \subset \mathrm{End}(V)$. Beweise, dass $f \mapsto u(f)$ eine Bijektion $\Omega \to \Theta$ definiert.

Aufgabe 12.4. Seien $A \in M_n(\mathbb{C})$ und $x \in \mathbb{C}^n$ sodass $\big(x, A(x), \ldots, A^{n-1}(x)\big)$ linear unabhängig ist. Sei $y \in \mathbb{C}^n$ und $\widetilde{A}_{x,y} = A + x \cdot {}^ty \in M_n(\mathbb{C})$ (hier ist $x \cdot {}^ty$ das Produkt einer $(n \times 1)$-Matrix mit einer $(1 \times n)$-Matrix).

(a) Bestimme das charakteristische Polynom von $\widetilde{A}_{x,y}$ in Abhängigkeit vom charakteristischen Polynom von A und von y.

(b) Sei $P \in \mathbb{C}[t]$ ein unitäres Polynom vom Grad n. Zeige, dass es $y \in \mathbb{C}^n$ gibt, sodass P das charakteristische Polynom von $\widetilde{A}_{x,y}$ ist.

Aufgabe 12.5. Sei K ein Körper. Man betrachtet die K-Vektorräume $K^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to K\}$ und
$$K^{(\mathbb{N})} = \{f : \mathbb{N} \to K \mid f(n) \neq 0 \text{ für höchstens endlich viele } n \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Konstruiere einen Isomorphismus zwischen den dualen Raum $\big(K^{(\mathbb{N})}\big)^*$ und $K^{\mathbb{N}}$.

(b) Beweise, dass es keinen K-Vektorraum W gibt, sodass W^* isomorph zu $K^{(\mathbb{N})}$ ist.

Hinweis: Aufgabe 5.5 aus der Linearen Algebra I.

---

*Abgabe: Dienstag 08.07.2008 vor der Vorlesung.