Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 13*, 04.07.2008

Aufgabe 13.1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ -16 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q})\,.$$

Beweise, dass A trigonalisierbar ist, und bestimme eine Jordan Normalform von A^n für alle $n \geq 0$.

Aufgabe 13.2. Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Seien $u_1, \ldots, u_m$ Endomorphismen von V, die paarweise kommutieren. Dann gibt es eine Basis von V, die $u_1, \ldots, u_m$ gemeinsam trigonalisiert.

(b) Sei n die Dimension von V, und seien $u_1, \ldots, u_n$ nilpotente Endomorphismen von V, die paarweise kommutieren. Dann gilt

$$u_1 \circ \cdots \circ u_n = 0\,.$$

Aufgabe 13.3. Es sei K ein Körper und $P, M \in K[t]$ normiert und nicht konstant, sodass M ein Teiler von P ist und P ein Teiler von M^n ist, wobei n der Grad von P ist. Beweise, dass es eine Matrix $A \in M_n(K)$ mit P als charakteristischem Polynom und mit M als Minimalpolynom gibt.

Aufgabe 13.4. Seien $L = v + \mathbb{R}w$ und $L' = v' + \mathbb{R}w'$ zwei Geraden in $\mathbb{R}^n$, und $x = v' - v$. Beweise, dass L und L' genau dann windschief sind, wenn x, w und w' linear unabhängig sind.

Aufgabe 13.5. Es seien V_1, V_2, W_1 und W_2 endlichdimensionale K-Vektorräume. Beweise, dass

$$\mathrm{Hom}_K(V_1, V_2) \otimes_K \mathrm{Hom}_K(W_1, W_2) \quad \text{und} \quad \mathrm{Hom}_K(V_1 \otimes_K W_1, V_2 \otimes_K W_2)$$

als K-Vektorräume kanonisch isomorph sind. Kann man Basen wählen, so dass der entsprechende Isomorphismus

$$M(m_1 \times m_2, K) \otimes_K M(n_1 \times n_2, K) \cong M(m_1 n_1 \times m_2 n_2, K)$$

gut zu beschreiben ist ?

Bitte lesen Sie die Hinweise zur Klausur auf der Rückseite.

*Abgabe: **Freitag (!)** 11.07.2008 vor der Vorlesung.

Hinweise zur Klausur am 18. Juli 2008

Über die **Zulassung** zur Klausur informiert das Servicebüro durch Aushang (vor dem Servicebüro und im Glaskasten vor dem Großen Hörsaal).

Die Klausur findet am 18. Juli 2008 von 10 Uhr (s.t.) bis 12 Uhr, im Wolfgang-Paul-Hörsaal statt. Bitte finden Sie sich 10 Minuten vor Beginn der Klausur vor Ort ein.

Mitzubringen sind Stifte (blau oder schwarz, kein Bleistift) und der **Personalausweis** oder Reisepass. Jacken und Taschen dürfen nicht mit in den Hörsaal genommen werden; wir werden für eine Aufsicht im Foyer sorgen. **Nicht zugelassen** sind Hilfsmittel wie Lehrbücher, Vorlesungsmitschriften, Notizen und Taschenrechner sowie Mobiltelefone. Das Mitführen eines nicht zugelassenen Gegenstands gilt als Betrugsversuch, unabhängig davon, ob dieser benutzt wurde oder nicht.

Die **Klausurergebnisse** werden vom Servicebüro durch Aushang (vor dem Servicebüro und im Glaskasten vor dem Großen Hörsaal) bekannt gegeben.

Diese Regeln gelten sinngemäß auch für die **Nachklausur**, die am Freitag, den 26. September 2008, von 10 Uhr (s.t.) bis 12 Uhr, im **grossen Hörsaal**, Wegelerstraße 10, stattfinden wird.