Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 2*, 11.04.2008

Aufgabe 2.1. Sei K ein Körper, $n \geq 1$ und $A \in M_n(K)$. Sei $E_n \in M_n(K)$ die Einheitsmatrix. Beweise:

(a) Für $m \geq 1$ ist $E_n - A$ ein Teiler von $E_n - A^m$.

(b) Falls $m \geq 1$ und $A^m = 0$ gilt, dann ist $E_n - A$ invertierbar. Wie sieht $(E_n - A)^{-1}$ aus?

Aufgabe 2.2. Zeige: für $m, n \geq 1$ sind $M_{mn}(K)$ und $M_m\big(M_n(K)\big)$ als Ringe isomorph.

Aufgabe 2.3. Sei R ein kommutativer Ring. Beweise, dass $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ für $A, B \in M_n(R)$ gilt.

Aufgabe 2.4. Sei $\lambda, \mu \in K$ und $A_n = (a_{ij}) \in M_{2n}(K)$ die Matrix, die durch

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda & \text{falls } \ i = j, \\ \mu & \text{falls } \ i + j = 2n + 1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist. Berechne $\det(A_n)$.

Aufgabe 2.5. Sei $n \geq 1$, und seien $z_1, \ldots, z_n$ komplexe Zahlen. Wir definieren

$$A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & \cdots & z_{n-1} & z_n \\ z_2 & z_3 & \cdots & z_n & z_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_{n-1} & z_n & \cdots & z_{n-3} & z_{n-2} \\ z_n & z_1 & \cdots & z_{n-2} & z_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) .$$

Beweise, dass

$$\det(A) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} y_1 \ldots y_n$$

mit $y_k = \sum_{i=1}^n \xi_n^{ik} z_i$, wobei $\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.
Hinweis: Multipliziere A mit $B = (b_{k\ell})$, wobei $b_{k\ell} = \xi_n^{k\ell} \in \mathbb{C}$.

Kennen Sie schon das Berufspraktische Kolloquium? In dieser Veranstaltungsreihe werden in Unternehmenspräsentationen und Fachvorträgen Berufsfelder für Mathematiker beschrieben. Außerdem gibt es Workshops rund um die Themen Jobsuche und Bewerben. Einige der Veranstaltungen können in Hinblick auf ein Industriepraktikum auch für Bachelor-Studierende interessant sein. Weitere Infos unter http://www.math.uni-bonn.de/people/welter/bk.html

*Abgabe: Dienstag 22.04.20078 vor der Vorlesung.