Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 4*, 25.04.2008

Aufgabe 4.1. Bestimme alle Elemente $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, für welche die Matrix

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

diagonalisierbar ist, und bestimme gegebenenfalls ihre Eigenwerte.

Aufgabe 4.2. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung, für welche jedes Element in V ein Eigenvektor ist. Beweise, dass f eine Homothetie ist.

Aufgabe 4.3. Sei K ein Körper, $n \geq 1$ und seien $A, B \in M_n(K)$.

(a) Sei $L_A : M_n(K) \to M_n(K)$ die lineare Abbildung, die durch $L_A(X) = AX$ definiert ist. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume von L_A in Abhängigkeit von den Eigenwerten und den Eigenräumen von A.

(b) Sei $R_A : M_n(K) \to M_n(K)$ die lineare Abbildung, die durch $R_A(X) = XA$ definiert ist. Bestimme die Eigenwerte und die Eigenräume von R_A in Abhängigkeit von den Eigenwerten und den Eigenräumen von A.

(c) Sei $\phi_{A,B} : M_n(K) \to M_n(K)$ durch $\phi_{A,B}(X) = AXB$ definiert. Falls λ (bzw. μ) ein Eigenwert von A (bzw. von B) ist, zeige, dass $\lambda\mu$ ein Eigenwert von $\phi_{A,B}$ ist. Erhält man auf diese Weise alle Eigenwerte von $\phi_{A,B}$?

Aufgabe 4.4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien $f, g : V \to V$ lineare Abbildungen. Beweise, dass fg und gf dasselbe charakteristische Polynom haben (betrachte zuerst den Fall wo g ein Isomorphismus ist).

Aufgabe 4.5. Sei $L \subset M_2(K)$ der Unterraum, der von der Einheitsmatrix E_2 und von

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugt ist.

(a) Beweise, dass L eine kommutative Unter-K-Algebra von $M_2(K)$ ist.

(b) Sei D eine K-Algebra mit Einheit 1 und einem Element η, das die Gleichung $\eta^2 = 0$ erfüllt, sodass $\{1, \eta\}$ eine Basis von D ist. Beweise, dass D und L als K-Algebren isomorph sind.

(c) Wir betrachten K als Unterring von L vermöge $\lambda \mapsto \lambda E_2$. Sei $A \in M_n(K)$ und sei $E_n \in M_n(L)$ die Einheitsmatrix. Beweise, dass die Gleichung

$$\det\big(E_n + \varepsilon A\big) = 1 + \varepsilon\,\mathrm{Spur}(A)$$

in L gilt.

Definition. Die K-Algebra L heißt *der Ring der dualen Zahlen über K*.

*Abgabe: Dienstag 06.05.2008 vor der Vorlesung.