Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 5*, 02.05.2008

Aufgabe 5.1. Sei K ein Körper. Beweise den Satz von Cayley-Hamilton durch direkte Rechnung für Matrizen in $M_2(K)$.

Aufgabe 5.2. Trigonalisiere die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 5 & 7 \\ -3 & 4 & 3 \\ -7 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ -5 & -5 & -4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Zeige zuerst, dass es möglich ist und gib die Matrix eines Basiswechsels an.

Aufgabe 5.3. Sei $A \in M_n(K)$, und sei M_A das Minimalpolynom von A.

(a) Beweise, dass A genau dann invertierbar ist, wenn der konstante Koeffizient von M_A nicht Null ist.
(b) Angenommen, A ist invertierbar. Zeige, dass es ein Polynom $Q(t) \in K[t]$ mit $Q(A) = A^{-1}$ gibt.

Definition. Zwei Matrizen $A, B \in M_n(K)$ sind *simultan trigonalisierbar*, falls es eine Matrix $S \in GL_n(K)$ gibt, sodass SAS^{-1} und SBS^{-1} obere Dreiecksmatrizen sind.

Aufgabe 5.4. Seien $A, B \in M_2(K)$ trigonalisierbare Matrizen. Zeige, dass A und B genau dann simultan trigonalisierbar sind, wenn die Gleichung $(AB - BA)^2 = 0$ gilt.

Aufgabe 5.5. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung, $W \subset V$ ein f-invarianter Teilraum und $g = f|_W : W \to W$. Beweise die folgenden Aussagen.

(a) Das charakteristische Polynom P_f ist ein Vielfaches von P_g.
(b) Falls f trigonalisierbar ist, dann ist g auch trigonalisierbar.
(c) Sei f diagonalisierbar mit Eigenräumen $V_1, \ldots, V_r$, sodass $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$. Dann gilt

$$W = \bigoplus_{i=1}^{r} (W \cap V_i).$$

(d) Falls f diagonalisierbar ist, dann ist g auch diagonalisierbar.

*Abgabe: Dienstag 20.05.2008 vor der Vorlesung.