Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 6*, 09.05.2008

Aufgabe 6.1. Die Fibonacci-Folge $\{a_n\}_{n\geq 0}$ ist die Folge natürlicher Zahlen definiert durch $a_0 = a_1 = 1$ und $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \geq 1$. Finde eine nicht rekursive Formel für a_n (also eine Formel, in der a_k mit $k \leq n-1$ nicht erscheint).
Hinweis: die lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y, x+y)$ ist diagonalisierbar.

Aufgabe 6.2. Berechne eine Jordansche Normalform der folgenden reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 2 & 9 & 12 \\ -4 & -2 & -5 & -7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

für beliebige $x, y \in \mathbb{R}$ und gib entsprechende Basiswechselmatrizen an.

Aufgabe 6.3. Sei V ein K-Vektorraum und seien $U, W \subset V$ Teilräume. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) U und W sind komplementäre Teilräume in V.
(b) Die Einschränkung der kanonischen Projektion $\rho : V \to V/W$ auf U ist ein Isomorphismus
$$\rho|_U : U \to V/W\,.$$

Aufgabe 6.4. Sei V ein K-Vektorraum, und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V. Für $v \in V$ bezeichne $[v] = \{v' \in V | v' \sim v\}$ die Äquivalenzklasse von v. Mit $V/\!\sim$ bezeichnen wir die Menge aller Äquivalenzklassen. Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) $V/\!\sim$ kann so mit einer K-Vektorraum-Struktur ausgestattet werden, dass die Abbildung
$$V \to V/\!\sim\,, \quad v \mapsto [v]$$
K-linear ist.
(b) Es existiert genau ein Teilraum $W \subset V$, sodass $V/\!\sim\, = V/W$.

Aufgabe 6.5. Sei $A \in M_n(K)$ mit charakteristischem Polynom und Minimalpolynom

$$P_A(t) = \pm \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{r_i} \quad \text{und} \quad M_A(t) = \pm \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{n_i}\,,$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ paarweise verschieden sind. Sei $d_i = \dim \mathrm{Eig}(A, \lambda_i)$ für $1 \leq i \leq k$ und sei $M \in M_n(K)$ eine Jordansche Normalform von A. Beweise:

(a) λ_i erscheint genau r_i mal als Diagonalkoeffizient in M.
(b) In M gibt es genau d_i Jordanblöcke (verschiedener Größe) zum Eigenwert λ_i.
(c) Der größte Block, der in (b) vorkommt, hat genau n_i Spalten und Zeilen.
(d) Falls $n \leq 6$, ist M eindeutig (bis auf Permutation der Blöcke) von $\lambda_i \in K$ und $r_i, n_i, d_i \in \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq k$ bestimmt.

*Abgabe: Dienstag 27.05.2008 vor der Vorlesung.