Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 7*, 23.05.2008

Aufgabe 7.1. Zeige, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:

(a) $\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.
(b) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos(\measuredangle(x,y))$ (Cosinussatz).
(c) $\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\langle x,y\rangle$.
(d) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ (Parallelogramm-Gleichung).

Aufgabe 7.2. Sei $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorprodukt. Für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ beweise die *Grassmann-Identität*

$$x \times (y \times z) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z$$

und die *Jacobi-Identität*

$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0\,.$$

Ist das Vektorprodukt assoziativ ?

Aufgabe 7.3. Sei K ein Körper der Chakteristik ungleich 2, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorrraum und $s : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform mit $s(v, -) \neq 0$ falls $v \neq 0$. Sei $q : V \to K$ die zu s gehörige quadratische Form. Ferner sei $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung.

(a) Beweise, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
  (1) $s\big(f(v), f(w)\big) = s(v, w)$ für alle $v, w \in V$.
  (2) $q\big(f(v)\big) = q(v)$ für alle $v \in V$.
  (3) Falls B eine Basis von V ist und $M_B(s), M_B(f)$ die darstellenden Matrizen von s und f sind, dann gilt
$$^tM_B(f)M_B(s)M_B(f) = M_B(s)\,.$$
(b) Beweise, dass $\{f \in \mathrm{End}_K(V) \mid f \text{ erfüllt die Aussagen in (a)}\}$ eine Untergruppe von $GL(V)$ ist.

Aufgabe 7.4. Sei K ein Körper, $A, U, V \in M_n(K)$ und $\lambda, \mu \in K$, sodass $A^k = \lambda^k U + \mu^k V$ für $k = 1, 2, 3$ gilt. Beweise, dass $A^k = \lambda^k U + \mu^k V$ für $k \geq 1$ gilt.

Aufgabe 7.5. Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Eine quadratische Wurzel von A ist eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{C})$ mit $B^2 = A$. Sei $E_n \in M_n(K)$ die Einheitsmatrix.

(a) Beweise, dass A eine quadratische Wurzel besitzt falls $A - E_n$ nilpotent ist.
(b) Beweise, dass A eine quadratische Wurzel besitzt falls A invertierbar ist.
(c) Finde alle quadratischen Wurzeln der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Abgabe: Dienstag 03.06.2008 vor der Vorlesung.