Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 8*, 30.05.2008

Aufgabe 8.1. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

(a) Beweise, dass $a(x,y) = {}^t\!xAy$ ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ definiert, und finde eine Orthonormalbasis.

(b) Seien

$$v_1 = (1,0,0,0),\ v_2 = (0,1,0,0),\ v_3 = (1,1,1,1) \text{ und } v_4 = (1,0,0,1) \in \mathbb{R}^4.$$

Berechne $\mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

(c) Berechne die orthogonale Projektion des Vektors v_4 auf der Hyperebene $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

Aufgabe 8.2. Finde alle Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$ für welche die kanonische Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ orthogonal ist und $\mathrm{Vol}(e_1, \ldots, e_n) = 1$.

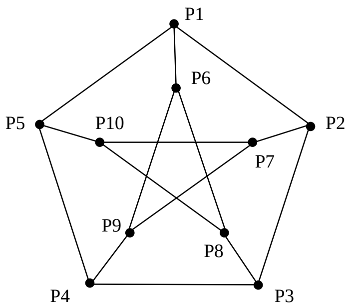
Aufgabe 8.3. Gibt es auf $\mathbb{R}^3$ ein Skalarprodukt, sodass $\mathrm{Vol}(v_1, v_2, v_3) = \sqrt[3]{2}$, wobei

$$v_1 = (4,3,9),\ v_2 = (3,1,8) \text{ und } v_3 = (2,4,2)\,?$$

Aufgabe 8.4. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei s ein Skalarprodukt auf V. Sei $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ der Dualraum zu V. Beweise, dass $\phi : V \to V^*$ mit $\phi(v)(w) = s(v,w)$ ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus ist.

Gilt die Aussage auch, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt ?

Aufgabe 8.5. Betrachte den folgenden Graph mit 10 Ecken $P1, \ldots, P10$ und 15 Kanten.



Man bildet die Matrix $A = (a_{ij}) \in M_{10}(\mathbb{R})$ mit $a_{ij} = 1$ falls Pi und Pj die Ecken einer Kante sind, und $a_{ij} = 0$ sonst. Finde die Eigenwerte, das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A.

*Abgabe: Dienstag 10.06.2008 vor der Vorlesung.