Prof. St. Schwede
Dr. Ch. Ausoni

ÜBUNGEN ZUR LINEAREN ALGEBRA II

Blatt 9*, 06.06.2008

Aufgabe 9.1. Bestimme für die Matrix

$$A = \frac{1}{90}\begin{pmatrix} 66 & -18\sqrt{6} & 10\sqrt{18} \\ 6\sqrt{6} & 72 & 15\sqrt{12} \\ -14\sqrt{18} & -9\sqrt{12} & 60 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $S \in U(3)$, so dass ${}^t\bar{S}AS$ Diagonalgestalt hat und eine Matrix $T \in O(3)$, sodass für ein $\alpha \in [0, 2\pi[$ gilt:

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 9.2. Sei $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die quadratische Form

$$Q(x, y, z) = x^2 + 4z^2 - 4xy + 2xz + 2yz\,.$$

Bestimme alle Unterräume $V \subset \mathbb{R}^3$ der Dimension 2, sodass die Einschränkung $Q|_V$ von Q auf V positiv definit ist.

Aufgabe 9.3. Sei $\phi : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch $\phi(A, B) = \mathrm{Spur}(AB)$ definiert.

(a) Beweise, dass ϕ eine symmetrische Bilinearform mit $\phi(A, -) \neq 0$ für $A \neq 0$ ist.

(b) Sei $W = \{A \,|\, A = {}^tA\} \subset M_n(\mathbb{R})$ der Unterraum der symmetrischen Matrizen. Beweise, dass die Einschränkung von ϕ auf W positiv definit ist.

(c) Bestimme $W^\perp$, und beweise, dass die Einschränkung von ϕ auf $W^\perp$ negativ definit ist (also $\phi(A, A) < 0$ für $A \in W^\perp \setminus \{0\}$).

Aufgabe 9.4. Sei K ein Körper und sei $A \in M_n(K)$. Finde eine notwendige und hinreichende Eigenschaft von A, sodass die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 9.5. Sei $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ die Matrix aus der Aufgabe 8.5. Finde eine Basis von jedem Eigenraum.

Hinweis: Markiert man jede Ecke Pj mit einer reellen Zahl x_j bekommt man einen Vektor $x \in \mathbb{R}^{10}$, und umgekehrt. Wie bekommt man die Markierung Ax aus der Markierung x, ohne die Matrix A hinschreiben zu müssen ? Gib deine Eigenvektoren als Markierung des Graphs an.

*Abgabe: Dienstag 17.06.2008 vor der Vorlesung.