ALGÈBRE 1 : CONTRÔLE PARTIEL 1

23 octobre 2018

NOM :	
Prénom :	
Numéro étudiant :	
Numéro du groupe de TD :	

1.A	1.B	2	3	4	5	6
Total :						
Note :						

Attention aux consignes suivantes :

— *Inscrivez vos nom, prénom, numéro étudiant et numéro de groupe, et laissez le tableau de droite vide.*
— *La durée du contrôle est de 2 heures.*
— *N'écrivez pas en rouge.*
— *Les documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques ne sont pas autorisés.*
— *Résolvez les exercices sur le brouillon, reportez vos réponses sur le sujet lorsqu'elles sont définitives. Un espace est laissé à la dernière page s'il vous manque de la place, ou si vous avez biffé une première réponse (mentionnez "voir dernière page" à l'endroit prévu pour la réponse).*

1. Vrai ou faux ?

Pour les questions 1.A et 1.B, dans la case à gauche, inscrivez **V** *pour les assertions vraies, et* **F** *pour les fausses. Si vous n'êtes pas sûr, laissez vide. Une réponse correcte donne 1 point, une réponse incorrecte donne -1,5 points, une case vide donne 0 point. Le nombre de points minimal pour chacune des questions 1.A et 1.B est 0. Pour faire une correction, noircir la case et en faire une nouvelle à gauche.*

Attention : *lisez les assertions très attentivement, leur valeur de vérité dépend de chaque détail !*

Question 1.A. Soit E un ensemble, et soient X, Y, et Z des sous-ensembles de E.
Pour chacune des assertions suivantes, décidez si elle est vraie (quelque soient E et X, Y, Z) ou fausse.

☐ $(X \cap Z) \cup (Y \cap Z) \ = \ (X \cap Y) \cup Z$

☐ $\big(X \subset Y\big) \ \Leftrightarrow \ \big(Y \subset E \smallsetminus X\big)$

☐ $(X \smallsetminus Y) \cap Y \ = \ X \cap (Y \smallsetminus X)$

☐ $(X \cup Y) \times Y \ = \ (X \times Y) \cup (Y \times Y)$ comme sous-ensembles de $E \times E$.

☐ $(X \cap Y) \times (Y \cap Z) \ = \ (X \times Y) \cap (Y \times Z)$ comme sous-ensembles de $E \times E$.

Question 1.B. Pour chacune des assertions suivantes, décidez si elle est vraie ou fausse. Dans les deux premières assertions, $g : E \to F$ désigne une application quelconque.

☐ Si g n'est pas surjective, il existe un élément de F ayant au moins deux antécédents distincts.

☐ Si g n'est pas surjective, il existe un élément de F n'ayant pas d'antécédent.

☐ $\text{non}\,(\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{Z},\ n \leq x < n+1) \ \Leftrightarrow \ (\exists x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ n > x \ \text{ ou } \ x \geq n+1)$.

☐ $\big(\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \exists k \in \mathbb{N},\ kn \geq m\big)$.

☐ $\big(\forall (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ \forall k \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\},\ (km = kn) \Rightarrow (m = n)\big)$.

Question 2. Répondez aux questions suivantes sur le cours dans l'espace prévu.

(a) Soient E et F deux ensembles. Donnez la définition d'un graphe dans $E \times F$:

(b) Soit E un ensemble et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ des propriétés portant sur les éléments de E. Énoncez, à l'aide d'une égalité entre sous-ensembles de E, le lien entre la réunion $\cup$ et le connecteur logique **ou**.

(c) Soit E un ensemble et soient A, B et C des sous-ensembles de E.

(1) Complétez l'égalité suivante, qui exprime une distributivité de l'intersection sur la réunion :

$$A \cap (B \cup C) =$$

(2) Dessinez un diagramme de Venn pour les sous-ensembles A, B et C de E, et coloriez les plages correspondant à $A \cap (B \cup C)$.

(d) Soit E un ensemble et $\mathcal{P}$ une propriété portant sur les éléments de E. Énoncez (en texte français) la proposition $\big(\exists x \in E\,,\ \mathcal{P}(x)\big)$, et indiquez ce qu'elle signifie en terme du sous-ensemble $\{x \in E\,; \mathcal{P}(x)\}$.

Question 3. Sans vous préoccuper de sa valeur de vérité, donnez chacune des propositions mathématiques suivantes en formule, puis sa négation en formule.

(a) $\mathcal{P}$: *Il existe un entier naturel non nul qui est le carré d'un entier naturel.*

$\mathcal{P}$:

non $\mathcal{P}$:

(b) $\mathcal{Q}$: *Tout entier naturel est soit divisible par* 2*, soit divisible par* 5*.*

$\mathcal{Q}$:

non $\mathcal{Q}$:

(c) $\mathcal{R}$: *Tout sous-ensemble de* $\mathbb{N}$ *contient au moins un élément.*

$\mathcal{R}$:

non $\mathcal{R}$:

Question 4. Soit $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions mathématiques. On se propose de vérifier si le connecteur logique $\Rightarrow$ est associatif. Pour cela, remplissez la table de vérité suivante, dont les colonnes donnent les valeurs de vérité de

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}), \quad (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}), \quad \big(\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})\big), \quad \text{et} \quad \big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}\big)$$

en fonction des valeurs de vérité de $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, et $\mathcal{R}$.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$	$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$	$\big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}\big)$	$(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})$	$\big(\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})\big)$

À l'aide de cette table, décidez quelles implications $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$ existent entre les propositions

$$\big(\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})\big) \quad \text{et} \quad \big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}\big)$$

puis donnez votre conclusion : le connecteur logique $\Rightarrow$ est-il associatif ?

Question 5. Soit E un ensemble, et soient U, V et W trois sous-ensembles de E. Pour $X \subset E$, notons $\overline{X} = E \setminus X$ le complémentaire de X dans E. En précisant quelles relations entre opérations sur les sous-ensembles vous utilisez, répondez aux questions suivantes.

(a) Donnez une expression plus simple pour le sous-ensemble

$$Z = (U \cap V \cap W) \cup (\overline{U} \cap V \cap W) \cup \overline{V} \cup \overline{W}.$$

(b) Démontrez l'égalité

$$(U \cap \overline{V}) \cap \overline{W} = U \cap \overline{(V \cup W)}.$$

Question 6. On considère l'application

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad (m,n) \mapsto f(m,n) = \begin{cases} (m, n-m) & \text{si } m \leq n, \\ (m, m-n) & \text{si } m > n. \end{cases}$$

Répondez aux questions suivantes. Pour (b) et (c), justifiez vos réponses, si nécessaire en utilisant un argument de disjonction (cas par cas).

(a) Calculez $f(0,0)$, $f(2,1)$ et $f(2,3)$.

(b) Déterminez les antécédents de $(0,2)$, $(2,0)$ et $(2,2)$.

(c) L'application f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

(d) Donnez une formule pour $f \circ f$ (cas par cas).

Espace supplémentaire : indiquez le numéro de la question.