ALGÈBRE 1 : CONTRÔLE PARTIEL 1

24 octobre 2019

1. VRAI OU FAUX ?

Pour les questions 1.A et 1.B, dans la case à gauche, inscrivez **V** *pour les assertions vraies, et* **F** *pour les fausses. Si vous n'êtes pas sûr, laissez vide. Une réponse correcte donne 1 point, une réponse incorrecte donne -1,5 points, une case vide donne 0 point. Le nombre de points minimal pour chacune des questions 1.A et 1.B est 0. Pour faire une correction, noircir la case et en faire une nouvelle à gauche.*

Attention : *lisez les assertions très attentivement, leur valeur de vérité dépend de chaque détail !*

Question 1.A. Soit E un ensemble, et soient X, Y, et Z des sous-ensembles de E.
Pour chacune des assertions suivantes, décidez si elle est vraie (quelque soient E et X, Y, Z) ou fausse.

- ☐ $(X \subset Z) \Rightarrow \big(X \subset Y \text{ et } Y \subset Z\big)$
- ☐ $(X \smallsetminus Y) \cup Y = X$
- ☐ $(X \smallsetminus Y) \times Z = (X \times Z) \smallsetminus (Y \times Z)$ comme sous-ensembles de $E \times E$.
- ☐ $(E \times X) \cup (X \times E) = E \times E$ comme sous-ensembles de $E \times E$.
- ☐ $(X \subset X \cup Y) \Leftrightarrow (Y \subset X \cup Y)$.

Question 1.B. Pour chacune des assertions suivantes, décidez si elle est vraie ou fausse.

- ☐ Le sous-ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,;\; x^2 = -y\}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un graphe.
- ☐ Le sous-ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}\,;\; y = 1\}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$ est un graphe.
- ☐ Le sous-ensemble $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}\,;\; x = y\}$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ est un graphe.
- ☐ $\big(\forall (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\,,\; \exists k \in \mathbb{N}\,,\; kn = m\big)$.
- ☐ $\big(\forall n \in \mathbb{N}\,,\; \exists k \in \mathbb{N}\,,\; (n \leq k) \Rightarrow (n = 0)\big)$.

2. DÉFINITIONS ET RÉSULTATS DU COURS

Question 2.

(a) Donnez l'affirmation sur laquelle repose le raisonnement par **déduction**, et démontrez-la.

(b) Soit $E = \{1, 2, 3\} \subset \mathbb{N}$ et soient A, B et C les sous-ensembles de $P(E)$ donnés par

$$A = \{X \in P(E)\,;\; 1 \in X\}\,, \quad B = \{X \in P(E)\,;\; 2 \notin X\} \quad \text{et} \quad C = \{X \in P(E)\,;\; 1 \notin X \text{ et } 3 \in X\}\,.$$

(1) Donnez les ensembles A, B et C en extension.

(2) Dessinez un diagramme de Venn pour les sous-ensembles A, B et C de $P(E)$, et reportez-y tous les éléments de $P(E)$.

(c) Soient E et F des ensembles, et soit $f : E \to F$ une application. Soit $A \subset F$ un sous-ensemble.

(1) Définissez *l'application identité de* E en donnant son graphe.

(2) Définissez l'ensemble $f^{-1}(A)$.

Exercices

Question 3. Sans vous préoccuper de sa valeur de vérité, donnez chacune des propositions mathématiques suivantes en formule, puis sa négation en formule.

(a) $\mathcal{P}$: *Il existe un entier naturel qui divise chaque entier naturel.*

(b) $\mathcal{Q}$: *Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, alors n est pair.*

(c) $\mathcal{R}$: *Tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ contient* 0.

Question 4. Soit $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ des propositions mathématiques. Remplissez la table de vérité suivante, dont les colonnes donnent les valeurs de vérité des propositions indiquées sur la première ligne, en fonction des valeurs de vérité de $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, et $\mathcal{R}$.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$	$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}$	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R}$	$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}) \vee (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})$

À l'aide de cette table, décidez quelles implications $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\Leftrightarrow$ existent entre les propositions

$$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \Rightarrow \mathcal{R} \quad \text{et} \quad (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}) \vee (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})\,.$$

Question 5. Démontrez par contraposée la proposition suivante :

Pour $n \in \mathbb{N}$, si 8 ne divise pas $n^2 - 1$, alors n est pair.

Question 6. On considère l'application

$$g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}, \quad n \mapsto g(n) = \begin{cases} 1 - n/2 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 1 + (n-3)/2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Répondez aux questions suivantes en justifiant vos réponses. Si nécessaire utilisez un argument de disjonction.

(a) Déterminez $g(4)$ et $g(5)$.

(b) Déterminez les antécédents de -1, de 0 et de 2.

(c) L'application g est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

(d) Donnez en compréhension un sous-ensemble $B \subset \mathbb{N}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(1) $g(B) = \mathbb{Z}$, et

(2) La restriction $g|_B : B \to \mathbb{Z}$ est bijective.