# ALGÈBRE 1 : CONTRÔLE PARTIEL 2

21 janvier 2020

## 1. Vrai ou faux ?

*Pour les questions 1.A et 1.B, dans la case à gauche, inscrivez* **V** *pour les assertions vraies, et* **F** *pour les fausses. Si vous n'êtes pas sûr, laissez vide. Une réponse correcte donne 1 point, une réponse incorrecte donne -1,5 points, une case vide donne 0 point. Le nombre de points minimal pour chacune des questions 1.A et 1.B est 0. Pour faire une correction, noircir la case et en faire une nouvelle à gauche.*

**Attention :** *lisez les assertions très attentivement, leur valeur de vérité dépend de chaque détail !*

**Question 1.A.** Pour chacune des assertions suivantes, décidez si elle est vraie ou fausse. On rappelle que pour $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{re}(z)$ désigne la partie réelle de $z$.

- ☐ Dans $\mathbb{C}$, on a $\frac{2+2i}{1-i} = (1+i)^2$.
- ☐ Quelque soit $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{z^2} = \overline{z}^2$.
- ☐ Dans $\mathbb{C}$, si $z = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}i$, alors $\mathrm{re}(z^2) = -\frac{7}{36}$.
- ☐ Si $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{re}(z) = 0$, alors $z^2 \in \mathbb{R}$ et $z^2 \geq 0$.
- ☐ Si $w = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, alors $w^{2020} = -1$.

**Question 1.B.** Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ des applications. Pour chacune des assertions suivantes, décidez si elle est vraie ou fausse.

- ☐ Si $g \circ f$ est surjective, alors $f$ est surjective.
- ☐ Si $g \circ f$ est bijective, alors $f$ est injective.
- ☐ Si $A, B \subset X$, alors $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- ☐ Si $C \subset Z$, alors $C \subset g\big(g^{-1}(C)\big)$.
- ☐ Si $X = Z$ alors $f = g^{-1}$.

## 2. Définitions et résultats du cours

**Question 2.** Soit $E$ un ensemble, et soit $F = \mathcal{F}(E, E)$ l'ensemble de toutes les applications de $E$ dans $E$.

**(a)** Rappelez la définition de *la composition dans* $F$, qui est l'opération binaire $F \times F \xrightarrow{\circ} F$, $(g, f) \mapsto g \circ f$.

**(b)** On considère la proposition suivante :

*La composition* $F \times F \xrightarrow{\circ} F$ *est associative.*

Que signifie "*associative*" ici ? Démontrez cette proposition.

**(c)** Supposons que $E = \{1, 2\} \subset \mathbb{N}$. Montrez à l'aide d'un contre-exemple que la composition sur $F = \mathcal{F}(E, E)$ n'est pas *commutative.*

**(d)** Soit $G$ un ensemble muni d'une opération binaire $\star : G \times G \to G$. Sous quelles conditions dit-on que $G$, muni de cette opération, est un *groupe* ?

**(e)** Si $E$ contient au moins deux éléments distincts, alors la composition sur $F = \mathcal{F}(E, E)$ ne munit pas $F$ d'une structure de groupe.
Quelle condition n'est pas satisfaite ?
Donnez un contre-exemple montrant que cette condition n'est pas satisfaite dans le cas où $E = \{1, 2\} \subset \mathbb{N}$.

## Exercices

**Question 3.** Sans vous préoccuper de sa valeur de vérité, donnez chacune des propositions mathématiques suivantes en formule, puis sa négation en formule.

**(a)** $\mathcal{P}$ : *Il existe un entier relatif non-nul divisible par 2 mais non-divisible par 4.*

**(b)** $\mathcal{Q}$ : *Il existe des sous-ensembles $A$ et $B$ de $\mathbb{N}$ dont l'intersection est vide et dont la réunion est* $\mathbb{N}$.

**(c)** $\mathcal{R}$ : *Il existe dans l'ensemble $\mathbb{Q}$ deux éléments distincts.*

**Question 4.** Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$, et soient $q$ et $r$ le quotient et le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$, respectivement.

**(a)** Quelle égalité est à la base de *l'algorithme d'Euclide* ?

$$\mathrm{pgcd}(a, b) =$$

**(b)** Quel est le quotient $q$ et le reste $r$ de la division euclidienne de 2581 par 2059 ?

**(c)** Calculez $\mathrm{pgcd}(2581, 2059)$ en effectuant l'algorithme d'Euclide.

**Question 5.** Soient $A$ et $B$ deux ensembles finis.

**(a)** Donnez la définition de $\mathrm{card}(A)$.

**(b)** Donnez une formule pour $\mathrm{card}(A \times B)$ en fonction de $\mathrm{card}(A)$ et $\mathrm{card}(B)$.

**(c)** Démontrez la formule énoncée en (b) par récurrence sur $\mathrm{card}(A)$. Vous pouvez utiliser sans la démontrer la formule $\mathrm{card}(X \cup Y) = \mathrm{card}(X) + \mathrm{card}(Y) - \mathrm{card}(X \cap Y)$ valables pour des ensembles finis $X$, $Y$ quelconques.

**Question 6.** Soit $E$ un ensemble non-vide, et soit $P(E)$ l'ensemble des parties de $E$.
On considère sur $P(E)$ la relation $\sim$ donnée par

$$A \sim B \Leftrightarrow (A = B \text{ ou } A = E \setminus B), \text{ pour tous } A, B \in P(E).$$

**(a)** Démontrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $P(E)$, en utilisant une preuve par disjonction pour la transitivité.

**(b)** Dans le cas où $E = \{1, 2, 3, 4\}$, donnez en extension les classes d'équivalence $C_\emptyset$, $C_{\{1\}}$ et $C_{\{3,4\}}$ des éléments $\emptyset, \{1\}, \{3, 4\} \in P(E)$ respectivement.

**(c)** Dans le cas où $E$ est un ensemble fini, on a vu que $\mathrm{card}\big(P(E)\big) = 2^{\mathrm{card}(E)}$. Donnez une formule pour le cardinal de $P(E)/\sim$ (donc pour le nombre de classes d'équivalences) en fonction du cardinal de $E$, et justifiez-la.