Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Sommersemester 2012

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG "DIE STEENROD-ALGEBRA"

Blatt 1*, 10.04.2012

Aufgabe 1.1. Berechne $H^m(K(\mathbb{Z}, n); \mathbb{F}_2)$ für $n \leq m \leq n+2$.

Aufgabe 1.2. Zwei Erweiterungen $\xi_i : 0 \to A \to B_i \to C \to 0$ von abelschen Gruppen $(i = 1, 2)$ heißen äquivalent, wenn ein Homomorphismus $f : B_1 \to B_2$ existiert, so dass

$$\begin{tikzcd}
 & & B_1 \arrow[dd, "f"] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[ur] \arrow[dr] & & C \arrow[r] & 0 \\
 & & B_2 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Sei $\Xi(C, A)$ die Menge der Äquivalenzklassen von solchen Erweiterungen. Wir definieren eine Abbildung

$$\theta : \Xi(C, A) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(C, A)$$

durch $\theta(\xi) = \partial_\xi(\mathrm{id}_C)$: Hier ist $\partial_\xi : \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, C) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(C, A)$ der Rand-Operator in der langen exakten $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}}(C, -)$-Folge von ξ. Beweise, dass θ bijektiv ist.
Bemerkung: Man kann die "Baer"-Summe $\xi_1 + \xi_2$ von zwei Erweiterungen $\xi_1, \xi_2 \in \Xi(C, A)$ durch Angabe einer expliziten Erweiterung definieren, und zeigen, dass θ additiv ist.

Aufgabe 1.3. Sei $n \geq 1$, und sei $\xi : 0 \to A \to B \to C \to 0$ eine Erweiterung von abelschen Gruppen. Betrachte die Kohomlogie-Operation $\phi_n(\xi) \in \mathcal{O}(C, n, A, n+1)$, die vom Rand-Operator ∂_n in der langen exakten Folge in Kohomologie bezüglich der Folge von Koeffizienten ξ definiert ist. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) ϕ_n definiert eine bijektive Abbildung

$$\Xi(C, A) \to \mathcal{O}(C, n, A, n+1).$$

(b) Setzt man $\phi_0(\xi) = 0$, so definiert $\phi = \{(-1)^n \phi_n\}$ eine bijektive Abbildung

$$\Xi(C, A) \to \mathcal{O}^1(C, A).$$

(c) Die stabile Operation $\phi(\xi)$ ist genau dann trivial, wenn ξ spaltet.

Aufgabe 1.4. Zeige, dass $\mathrm{Sq}^1 : H^1(X; \mathbb{F}_2) \to H^2(X; \mathbb{F}_2)$, definiert durch $\mathrm{Sq}^1(\alpha) = \alpha^2$, teil einer eindeutigen stabilen Operation $\mathrm{Sq}^1 \in \mathcal{A}^1_2$ ist.

---

*Abgabe: Dienstag 17.04.2012 in der Vorlesung.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie3-WS11-12.html`