Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Sommersemester 2012

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG "DIE STEENROD-ALGEBRA"

Blatt 2*, 17.04.2012

Aufgabe 2.1. Gib eine explizite bijektive Korrespondenz zwischen $\mathcal{O}^d(M,N)$ und die Menge der stabilen Operationen in unreduzierter Kohomologie. Beweise, dass die lange exakte Folge eines Paares in mod p Kohomologie ein Folge von $\mathcal{A}_p$-Moduln ist.

Aufgabe 2.2. Bestimme $\mathcal{O}(\mathbb{Q},m,\mathbb{Q},n)$ und $\mathcal{O}^d(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$ für alle $0 \leq m \leq n$ und alle $d \geq 0$.
Hinweis: Hier darf man benutzen, dass falls A eine Torsionsgruppe ist, so ist $H_n(K(A,1);\mathbb{Z})$ eine Torsionsgruppe für alle $n \geq 1$.

Unser Ziel in den zwei nächsten Aufgaben ist es, Klassen $x_i \in H^i(SO(n);\mathbb{F}_2)$ für $1 \leq i \leq n-1$ zu definieren, und den folgenden Satz zu beweisen.

Satz : *Die Algebra $H^*(SO(n);\mathbb{F}_2)$ ist die kommutative $\mathbb{F}_2$-Algebra mit Erzeugern $\{x_1,\dots,x_{n-1}\}$ und Relationen*

$$x_i^2 = \begin{cases} x_{2i} & \text{falls } 2i < n, \\ 0 & \text{falls } 2i \geq n. \end{cases}$$

Hierzu verwenden wir die Abbildung

$$f_n : \mathbb{R}P^{n-1} \to SO(n), \quad f_n(x) = R_* \circ R_x$$

für $*$ der Basispunkt von $\mathbb{R}P^n$, wobei R_y die Spiegelung von $\mathbb{R}^n$ in $y^\perp$ bezeichnet. Bemerke, dass f_n und f_{n+1} veträglich mit den Inklusionen $\mathbb{R}P^{n-1} \subset \mathbb{R}P^n$ und $SO(n) \subset SO(n+1)$ sind.

Aufgabe 2.3. Beweise, dass die Serre-Spektralsequenz für $H^*(-;\mathbb{F}_2)$ von der Faserung

$$SO(n-1) \xrightarrow{i} SO(n) \xrightarrow{p} S^{n-1}$$

im E^2-Term kollabiert. Folge daraus, dass die Beschreibung von $H^*(SO(n);\mathbb{F}_2)$ im obigen Satz mindestens additiv korrekt ist.
Hinweis: Zeige, dass pf_n einen relativen Homöomorphismus

$$(\mathbb{R}P^{n-1}, \mathbb{R}P^{n-2}) \to (S^{n-1}, *)$$

induziert. Folgere daraus, dass

$$p^* : H^{n-1}(S^{n-1};\mathbb{F}_2) \to H^{n-1}(SO(n);\mathbb{F}_2)$$

injektiv ist. Wir setzen $x_{n-1} = p^*(\iota_{n-1})$.

Aufgabe 2.4. Beweise den Satz durch Induktion auf n. Betrachte hierfür die kurze exakte Folge

$$0 \to H^{*-n}(SO(n);\mathbb{F}_2) \xrightarrow{x_n \cdot} H^*(SO(n+1);\mathbb{F}_2) \xrightarrow{i^*} H^*(SO(n);\mathbb{F}_2) \to 0,$$

die wir aus der vorigen Aufgabe gewinnen. Benutze i^*, um $x_1,\dots,x_{n-1} \in H^*(SO(n+1);\mathbb{F}_2)$ zu definieren. Benutze f_{n+1}^*, um die multiplikative Erweiterungen zu lösen.

---

*Abgabe : Dienstag 24.04.2012 in der Vorlesung.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie3-WS11-12.html`