Ch. Ausoni, F. Hebestreit WWU Münster, Sommersemester 2012

ÜBUNGEN ZUR VORLESUNG "DIE STEENROD-ALGEBRA"

Blatt 4*, 02.05.2012

Definition. Sei A eine abelsche Gruppe und $n \geq 1$. Ein Moore-Raum vom Typ (A, n) (oder ein Raum vom Typ $M(A, n)$) ist ein Paar (X, ϕ), wobei X ein punktierter CW-Komplex ist, mit reduzierter Homologie $H_m(X; \mathbb{Z}) = 0$ für $m \neq n$, und ϕ ein Isomorphismus $H_n(X; \mathbb{Z}) \to A$ ist.

Aufgabe 4.1. Sei A eine abelsche Gruppe und $n \geq 1$. Beweise die Existenz eines Moore-Raumes vom Typ (A, n). Unter welchen Bedingungen sind zwei Moore-Räume vom selben Typ homotopieäquivalent ?

Aufgabe 4.2. Sei A eine abelsche Gruppe und sei $n \geq 1$. Sei X ein Raum vom Typ $M(A, n)$ und sei Y ein Raum vom Typ $K(A, n)$.

(a) Beweise die Existenz einer kanonischen Abbildung $f : X \to Y$, bis auf Homotopie, die einen Isomorphismus auf $H_n(-; \mathbb{Z})$ induziert.
(b) Unter welcher Bedingung induziert f auch einen Isomorphismus auf $\pi_n(-)$?
(c) Wenn $n = 1$, unter welcher Bedingung an A kann man X so wählen, dass f ein π_1-Isomorphismus ist ?

Aufgabe 4.3. Sei $m \geq 2$. Wir wählen den Abbildungskegel $W_1 = C(m)$ einer Abbildung $m : S^1 \to S^1$ von Grad m als Raum vom Typ $M(\mathbb{Z}/m, 1)$, mit Isomorphismus $H_1(W_1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/m$ von dem Erzeuger $\iota_1 \in H_1(S^1; \mathbb{Z})$ bestimmt. Wir können offensichtlich $W_n = \Sigma^{n-1} W_1$ mit der Struktur eines Raumes vom Typ $M(\mathbb{Z}/m; n)$ versehen, für alle $n \geq 1$. Ist X ein punktierter Raum, so definieren wir

$$\pi_n(X; \mathbb{Z}/m) = [W_{n-1}, X]_*$$

für alle $n \geq 2$. Bemerke, dass $\pi_n(X; \mathbb{Z}/m)$ mit einer natürlichen Gruppenstruktur versehen ist, falls $n \geq 3$ gilt (sie ist abelsch für $n \geq 4$). Die "Gruppe" $\pi_n(X; \mathbb{Z}/m)$ (für $n \geq 2$) heißt die *n-te Homotopie-Gruppe von X mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/m$.*

Beweise die Existenz einer naürlichen kurzen exakten Folge

$$0 \to \pi_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/m \to \pi_n(X; \mathbb{Z}/m) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\pi_{n-1}(X); \mathbb{Z}/m) \to 0$$

für $n \geq 5$.

Aufgabe 4.4. Sei $n \geq 4$, und sei W_n ein Raum vom Typ $M(\mathbb{Z}/2, n)$, wie zum Beisiel in der vorigen Aufgabe festgelegt. Beweise, dass wir einen Isomorphismus

$$\pi_{n+1}(W_n; \mathbb{Z}/2) \cong [W_n, W_n]_* \cong \mathbb{Z}/4$$

haben. Was folgerst Du aus dieser Berechnung ?

Hinweis: Identifiziere die Abbildung $2\mathrm{id}_{W_n}$ mit

$$2 \wedge \mathrm{id} : S^1 \wedge W_{n-1} \to S^1 \wedge W_{n-1}$$

und bestimme Sq^2 auf der Homotopie-Kofaser dieser Abbildung.

---

*Abgabe : Dienstag 08.05.2012.
`http://wwwmath.uni-muenster.de/u/ausoni/topologie3-WS11-12.html`