

ALGÈBRE 1 : INTRODUCTION AUX STRUCTURES MATHÉMATIQUES

Feuille 0, semaine du 28.09.2020 (prérentrée).

*Devoirs pour la prochaine séance de TD :**- Résoudre en autonomie et rédiger soigneusement une solution des exercices marqués d'un ►.*

Exercice 0.1. Citez des définitions et des théorèmes étudiés au lycée. Formulez une définition et un théorème avec précision par écrit.

Exercice 0.2. Parmi les énoncés mathématiques suivants, les quels sont des définitions, les quels sont des propositions (au sens mathématique), et les quels n'entrent pas dans l'une de ces deux catégories ?

- (a) Le nombre 4 est positif.
- (b) $3 \times 3 = 9$.
- (c) Un triangle rectangle.
- (d) Posons $a = \int_0^1 t^2 - 1 dt$.
- (e) Calculez $\int_0^1 t^2 - 1 dt$.
- (f) $\int_0^1 t^2 - 1 dt$ est un nombre réel.
- (g) On a $\int_0^1 t^2 - 1 dt = 1$.
- (h) Le nombre 3 est pair.
- (i) Si n est un nombre réel positif, alors n^2 est positif.
- (j) Si n est un nombre réel et si n^2 est positif alors n est positif.
- (k) Certains nombres réels sont des nombres entiers.
- (l) Un nombre réel est appelé *vraiment super grand* s'il est plus grand ou égal à 2^{1000} .
- (m) $b^2 - 4ac$.
- (n) $b^2 + c - 1 < a$.

Exercice 0.3. À l'aide des règles de calcul usuelles, et sans utiliser de calculatrice, déterminez si les égalités suivantes entre nombres réels sont vraies ou fausses.

- (a) $(-0,5 : 0,1)^{-1} \stackrel{?}{=} -0,2$.
- (b) $\frac{2}{3} + \frac{3}{2} \stackrel{?}{=} 1$.
- (c) $\frac{1}{5} \stackrel{?}{=} 2^{-1} + 3^{-1} - \frac{19}{30}$.
- (d) $(\pi - 2)(\pi - 3) \stackrel{?}{=} \pi^2 + 6$.
- (e) $(2^3)^4 \stackrel{?}{=} 2^{(3^4)}$.

Exercice 0.4. On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Écrivez à l'aide des quantificateurs *il existe* (\exists), *pour tout* (\forall), et de variables $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ les assertions suivantes :

- (a) La fonction f admet zéro comme valeur.
- (b) La fonction f est l'application identité (elle envoie un nombre sur lui-même).
- (c) La fonction f est constante.
- (d) La fonction f est constante sur l'intervalle $[-1, 1]$.
- (e) La fonction f n'est pas constante.
- (f) La fonction f est de signe constant.
- (g) La fonction f n'admet pas 0 comme valeur.
- (h) La fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- (i) La fonction f n'est pas l'application identité.
- (j) La fonction f admet un maximum en 0.

Suite au verso →

Exercice 0.5. Déterminez si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont fausses, donnez un contre-exemple.

- (a) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$.
- (b) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $b < a$.
- (c) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$.
- (d) Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a $a < b$.
- (e) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a^2 > 1$ implique $a > 1$.
- (f) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ implique $a^2 > 1$.
- (g) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, il existe $c \in \mathbb{R}$ avec $ac = b$.
- (h) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $b \in \mathbb{R}$, il existe $c \in \mathbb{R}$ avec $ac = b$ ou $a = bc$.

Exercice 0.6. Dénotez par T l'ensemble des triangles du plan, que l'on suppose non dégénérés (donc déterminés par la donnée de trois points distincts non-alignés). On considère les sous-ensembles suivants :

A est l'ensemble des triangles isocèles.

B est l'ensemble des triangles équilatéraux.

C est l'ensemble des triangles ayant au plus un axe de symétrie.

D est l'ensemble des triangles ayant au moins deux axes de symétrie distincts.

E est l'ensemble des triangles ayant au moins trois axes de symétrie distincts.

F est l'ensemble des triangles ayant exactement quatre axes de symétrie distincts.

G est l'ensemble des triangles à la fois isocèles et rectangles.

- (a) Donnez toutes les inclusions existant entre ces ensembles.
- (b) Pour X l'un des ensembles ci-dessus, décrivez par une phrase une propriété qui caractérise les triangles ne se trouvant pas dans X . On notera X' cet ensemble (le complémentaire de X dans T).
- (c) Répéter l'exercice (a) avec les ensembles de triangles A' , B' , C' , D' , E' et F' .