Axiomes des réels, récurrences, suites

Exercice 1 Démontrer, à l'aide des axiomes des nombres réels, les points suivants :

1. Étant donnés a, b dans $\mathbb{R}$, l'équation $a + x = b$ a une unique solution x.
2. Étant donnés a, b dans $\mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, l'équation $ax = b$ a une unique solution x.
3. Les élements noté 0 et 1 sont uniques.
4. Étant donnés a, b dans $\mathbb{R}$ avec $b \neq 0$, les élements $-a$ et b^{-1} sont uniques. En outre on a $-(-a) = a$ et $(b^{-1})^{-1} = b$.
5. Pour tout a dans $\mathbb{R}$ on a $a \cdot 0 = 0$ et $(-1) \cdot a = -a$.

Exercice 2 Démontrer l'inégalité triangulaire inverse :

$$|x - y| \geqslant \big||x| - |y|\big| \text{ pour tous } x, y \text{ dans } \mathbb{R}.$$

Exercice 3 Démontrer que $x^2 \neq 2$ pour tout x dans $\mathbb{Q}$. La même équation admet une solution dans $\mathbb{R}$, notée $\sqrt{2}$, dont on donne la construction suivante.

1. Démontrer que l'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R}; x^2 \leqslant 2\}$ est non vide et borné supérieurement.
2. Soit $a := \sup A$. Démontrer qu'on a $a^2 = 2$.

Exercice 4 Prouver par récurrence les idéntités suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercice 5 Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Indiquer (en justifiant brièvement) si chacune des assertions suivantes est vraie.

1. Si u est croissante et convergente, elle est majorée.
2. Si u est majorée et convergente, elle est croissante.
3. Si u est décroissante et positive, elle converge.
4. Si u est croissante et non majorée, elle diverge.
5. Si u et v sont divergentes, $u + v$ est divergente.
6. Si u est convergente et v divergente, $u + v$ est divergente.
7. Si u est convergente et v divergente, uv est divergente.

Exercice 6 Etudier la convergence des suites de terme général a_n et calculer leur limite dans la cas de convergence[1] :

$$a_n = \frac{n^3}{1+10n^2} \qquad a_n = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \qquad a_n = \frac{\sin n}{3^n} \qquad a_n = \frac{(\ln n)^2}{n}$$

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \qquad a_n = \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^n \qquad a_n = \left(\frac{2-n^2}{3+n^2}\right)^n.$$

Exercice 7 Soit u_n une suite réelle convergente vers $l > 0$. Montrer qu'il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$ on a $u_n > l/2$.

Exercice 8 On considère la suite $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}$ avec $u_0 = 1$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 9 On considère la suite

$$u_n = \frac{2}{u_{n-1}} + 1 \qquad \text{avec} \qquad u_0 = 1.$$

Calculer la valeur limite si elle existe et étudier la convergence.

Exercice 10 u_n est définie par $u_n = \ln(1 + u_{n-1})$ avec $u_0 > 0$. Chercher la limite de u_n.

Exercice 11 On définit par récurrence les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 2, \quad u_{n+1} = \frac{(u_n)^2}{u_n + v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{(v_n)^2}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer par récurrence que l'on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissent. En déduire qu'elles convergent vers l et l' respectivement. Montrer que l'on a $ll' = 0$.
3. Montrer que la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire l et l'.

Exercice 12 Etant donné les nombres a et b vérifiant $0 < a < b$, on considère les deux suites :

$$u_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}$$

$$v_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}$$

avec $u_0 = a$ et $v_0 = b$. Montrer que ces deux suites sont convergentes et admettent la même limite.

---

1. Si necessaire, utiliser la limite $\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.