Université Paris 13 Année 2013-2014
L2 Analyse et Algèbre **feuille n° 10**

Réduction des endomorphismes (2)

Exercice 1. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m \in M_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

1. Calculer les valeurs propres de A_m et donner une base de vecteurs propres.
2. Déterminer suivant les valeurs de m le rang de A_m. Déterminer A_m^{-1} lorsque cela est possible.
3. Lorsque A_m n'est pas inversible, déterminer le noyau et l'image de A_m.

Exercice 2. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique de M. En déduire M^{-1}.

Exercice 3. Soit $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire dont la matrice relativement à la base canonique est

$$U = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\dim \ker(u + \mathrm{Id}) = 2$ et en donner une base, qu'on notera (e'_1, e'_2).
2. Donner une base de $\ker(u - \mathrm{Id})$, qu'on notera e'_3, et montrer que

$$\ker(u + \mathrm{Id}) \oplus \ker(u - \mathrm{Id}) = \mathbb{R}^3.$$

3. Donner la matrice de u dans la base (e'_1, e'_2, e'_3) et calculer u^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u : E \to E$ une application linéaire. Montrer que si un nombre complexe λ est une valeur propre de u, alors λ^n est une valeur propre de u^n pour tout entier $n > 0$. En déduire que 0 est la seule valeur propre de u si et seulement si u est nilpotent (ce qui signifie qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $u^n = 0$).

Exercice 5. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes pour que les matrices ci-dessous soient diagonalisables.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donner un polynôme annulateur de A de degré aussi petit que possible. En déduire A^{-1}, A^3, et A^5.

Exercice 7. Soient $M_a = \begin{pmatrix} a+1 & 1-a & a-1 \\ -1 & 3 & 2a-3 \\ a-2 & 2-a & 3a-2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice dépendant d'un paramètre réel a et f_a l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ ayant pour matrice M_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
1. Calculer les valeurs propres de M_a en fonction de a. Pour quelle raison la matrice M_a est-elle triangularisable ?
2. Pour quelles valeurs du paramètre a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?
3. Diagonaliser M_2. Déterminer une racine carrée A de M_2, c'est à dire déterminer une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = M_2$.

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} -1-a & -1 & 3+a \\ -a & 1 & a \\ -2-a & -1 & 4+a \end{pmatrix}$$

1. Trouver les valeurs propres de M_a. On appellera λ_1 la valeur propre simple et λ_2 la valeur propre double.
2. Pour quelle valeur de a l'endomorphisme f_a est-il diagonalisable?
3. Pour $i = 1, 2$ trouver u_i, vecteur propre de f_5 pour la valeur propre λ_i, et trouver v_1 tel que $f_5(v_1) = \lambda_1 v_1 + 5u_1$
4. Montrer que pour tout a, (u_1, v_1) est une famille libre de $\ker(f_a - \lambda_1 \operatorname{Id})^2$ et que u_2 est une base de $\ker(f_a - \lambda_2)$. Montrer que $B = (u_1, v_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Écrire la matrice de f_a dans la base B.
6. Soit $F_1 = \operatorname{Vect}(u_1, v_1)$ et $F_2 = \operatorname{Vect}(u_2)$. Calculer dans la base canonique la matrice P_1 de la projection p_1 sur F_1 parallèlement à F_2 et P_2, matrice de la projection p_2 sur F_2 parallèlement à F_1.
7. Exprimer f_0^n pour tout $n \geq 0$ en fonction de p_i, λ_i, $i = 1, 2$.
8. Montrer que f_0 et $f_a - f_0$ commutent. En déduire le calcul de $(f_a - f_0)^n$ pour tout n, et calculer M_a^n.

Exercice 9. Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \\ u_0 = 0. \end{cases}$$

Exercice 10. Résoudre l'équation différentielle :

$$\begin{cases} f''' + f'' + f' + f = 0 \\ f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 11. Résoudre les systèmes différentiels suivants

$$\begin{cases} x'(t) = 4x + 6y \\ y'(t) = -3x - 5y \\ z'(t) = -3x - 6y - 5z \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = 2x + y + z \\ y'(t) = 3x + 3y + 4z \\ z'(t) = -3x - y - 2z \end{cases}$$