Suites 2

Exercice 1 Montrer que la suite $\left(\frac{\sin n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et que la suite $\left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas.

Exercice 2 Montrer que la suite de terme générale :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\alpha}}{k^2+k} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

est une suite de Cauchy.

Exercice 3 On veut montrer de plusieurs manières différentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$ ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

1. On pose $v_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n+1} + ... + \frac{1}{2^n+(2^n-1)}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n > \frac{1}{2}$.
   (b) Montrer que $u_{2^{n+1}-1} = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et conclure.
2. Comparer u_n à une intégrale. Montrer de plus que la suite $w_n = u_n - \log n$ est décroissante et minorée, en déduire qu'elle converge.

Exercice 4 Etudier la convergence des suites de terme générale a_n et calculer leur limite dans la cas de convergence :

$$a_n = \frac{2n}{5n-3} \qquad a_n = \frac{1+(-1)^n}{\sqrt{n}} \qquad a_n = \pi^{(\sin n)/n} \qquad a_n = n \sin\frac{1}{n}$$

$$a_n = n\left(e^{\frac{5}{n}} - 1\right) \qquad a_n = n\left(5^{\frac{1}{n}} - 1\right) \qquad a_n = n^2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right) \qquad a_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n = \prod_{k=2}^{n} \cos(\frac{\pi}{2^k})$ et $v_n = u_n \sin(\frac{\pi}{2^n})$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.
2. Montrer que $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite géométrique. En déduire la limite de $(u_n)_{n\geqslant 2}$.

Exercice 6 On considère l'équation :

$$x^n + x^{n-1} + ... + x^2 + x - \frac{n+1}{n} = 0 \tag{1}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ cette équation a une unique solution positive que l'on note u_n.
2. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 7 Soient a_0, b_0 deux réels avec $a_0 \geqslant b_0$. On définit les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ par les relations de récurrence suivantes :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}.$$

1. Montrer que ces suites sont adjacentes [1].
2. Montrer qu'elles convergent vers $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercice 8 Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + b, \qquad a \neq 1.$$

1. Soit $v_n = u_n - c$. Montrer qu'il existe une unique valeur de c pour laquelle v_n est une suite géométrique.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n et étudier la convergence de (u_n).

Exercice 9 (Facultatif) Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par la relation de récurrence :

$$u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}, \qquad a, b \in \mathbb{C}.$$

1. Montrer que $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Soient λ_1, λ_2 deux racines différentes de $x^2 - ax - b = 0$. Montrer que l'on peut écrire $u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$, où α, β sont des constantes à déterminer à partir de u_0 et u_1.
3. Soit λ racine double de $x^2 - ax - b = 0$. Montrer que l'on peut écrire $u_n = \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^{n-1}$, où α, β sont des constantes à déterminer à partir de u_0 et u_1.
4. Application : La suite de Fibonacci est définie par $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ et $F_0 = 0, F_1 = 1$. Ecrire F_n en fonction de n. Calculer la limite de $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ lorsque $n \to \infty$.

Exercice 10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, et soit l un nombre complexe. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l *au sens de Césaro* si la suite des moyennes

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$$

converge vers l lorsque n tend vers l'infini.

1. Montrer que la convergence des suites implique la convergence au sens de Césaro.
2. En considérant la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que la réciproque est fausse.
3. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et soit $l \neq 0$, montrer l'implication

   $$(\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = l) \Longrightarrow (\lim \sqrt[n]{a_n} = l).$$

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ converge.

Exercice 11 Soient a_n et b_n deux suites qui convergent vers a et b. On pose :

$$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$

Montrer que la suite u_n tend vers ab.

1. Deux suites réelles sont dites adjacentes si l'une des suites est croissante (au sens large), l'autre suite décroissante (au sens large) et si la différence des deux tend vers 0.